EXERCICES • 3ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 9 — Fonction dérivée et variations

1 Variations et extremums

Exercice 1

Soit $f(x)=x^2-2|x-1|$ sur $\mathbb{R}$.

1) Étudier la dérivabilité de f en 1.

2) Dresser le tableau de variation de f et préciser la nature de chaque extremum.

Exercice 2

Pour tout réel a, on considère la fonction f_a définie par $f_a(x)=\dfrac{2x^2-3x+a}{x-2}$, a réel, de courbe ζ_a.

1) Calculer $\lim_{|x|\to+\infty}(f_a(x)-2x-1)$. Interpréter.

2) Dresser le tableau de variation de f_0.

3) Pour quelles valeurs de a la fonction f_a admet-elle un maximum et un minimum ?

4) Exprimer en fonction de a les coordonnées des deux points correspondants de ζ_a et déterminer l'ensemble de ces points quand a varie.

5) Soit K le point où ζ_a coupe l'axe des ordonnées ($a\neq-2$). Écrire l'équation de la tangente en K et montrer qu'elle coupe l'asymptote oblique en un point fixe T.

Exercice 3

Pour tout réel a, on considère la fonction f_a définie par $f_a(x)=\dfrac{x^2-ax}{x^2-4x+3}$. Déterminer a pour que f_a :

1) n'admette pas d'extremum ;

2) admette un maximum et un minimum ;

3) admette uniquement un minimum.

Exercice 4

ABC est équilatéral de côté a, $M\in[BC]$ distinct de B et C ; H et K sont les projetés orthogonaux de M sur (AB) et (AC) ; $BM=x$.

1) Exprimer l'aire $A(x)$ du quadrilatère $AHMK$.

2) Déterminer x pour que l'aire soit maximale.

Exercice 5

Discuter suivant a le nombre d'extremums de $f_a(x)=\dfrac{2x^2+ax}{x^2-1}$.

2 Lectures graphiques

Exercice 6

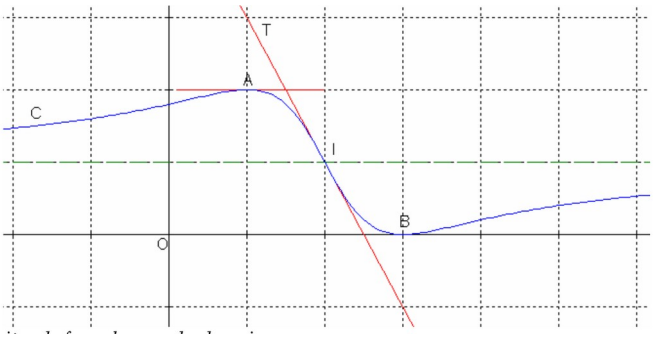
Première partie. Soit $f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-4x+5}$ définie sur $\mathbb{R}$. Calculer a et b pour que la courbe passe par $I(2;1)$ et admette en I une tangente parallèle à la droite $y=-2x$.

Deuxième partie. Soit $f(x)=\dfrac{(x-3)^2}{x^2-4x+5}$, dont la courbe (C), l'asymptote et la tangente (T) en I sont tracées ci-dessous.

1) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

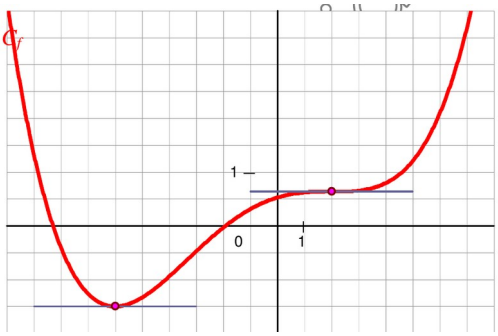
2) Étudier les variations de f.

3) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point I.



Exercice 7

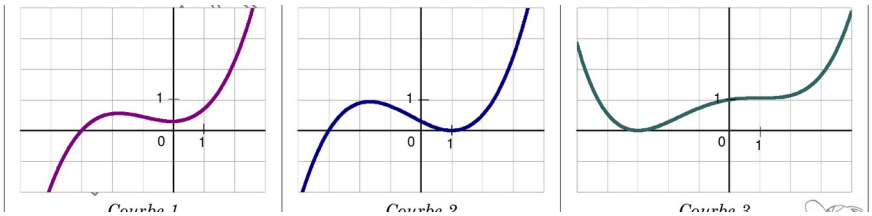
(C_f) est la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$: les tangentes aux points d'abscisses -3 et 1 sont horizontales ; la tangente au point $(3;\dfrac{21}{10})$ passe par $(4;\dfrac{45}{10})$.



1) Déterminer graphiquement $f'(-3)$, $f'(1)$ et $f'(3)$.

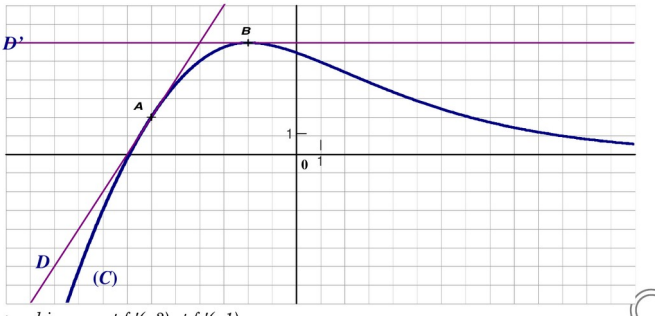
2) Résoudre graphiquement l'inéquation $f'(x)>0$.

3) Laquelle des trois courbes ci-dessous représente f' ? Justifier.



Exercice 8

La courbe (C) de f passe par $A(-3;1)$ et $B(-1;3)$; les tangentes (D) en A et (D') en B se coupent au point d'abscisse -2.



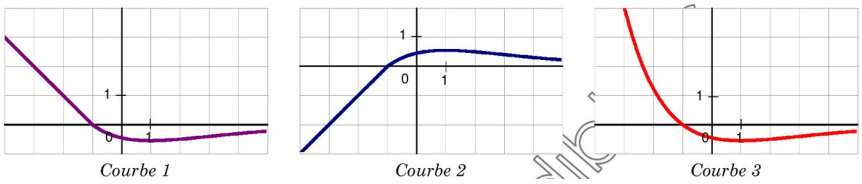
1) Déterminer graphiquement $f'(-3)$ et $f'(-1)$.

2) Laquelle des trois courbes ci-dessous représente f' ?

3) Soit $g=\dfrac{1}{f}$ sur $]-\dfrac{31}{10};+\infty[$.

a) Étudier les variations de g.

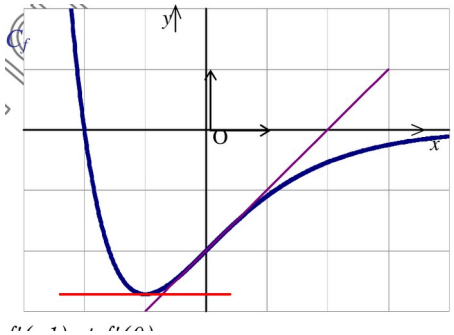
b) Calculer $g'(-3)$.



Courbe 1 *Courbe 2* *Courbe 3*

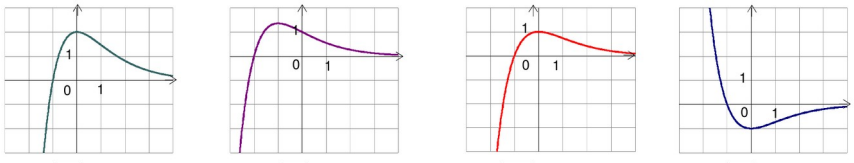
Exercice 9

(C_f) passe par $(-2;0)$ et $(0;-2)$; la tangente au point d'abscisse -1 est horizontale ; la tangente au point d'abscisse 0 coupe l'axe des abscisses en $x=2$.



1) Déterminer graphiquement $f(0)$, $f'(-1)$ et $f'(0)$.

2) Laquelle des quatre figures ci-dessous représente f' ? Justifier.



☐ *Figure 1* ☐ *Figure 2* ☐ *Figure 3* ☐ *Figure 4*

3 Problèmes

Exercice 10

Soit f dérivable sur $I=[0;1[$, ne s'annulant pas sur I, telle que $f(0)=1$ et $f'(x)=f^2(x)$ pour tout $x\in I$.

Soit $g(x)=f^2(x)+\dfrac{1}{f^2(x)}$.

1) a) Démontrer que $g'(x)=2f^3(x)-\dfrac{2}{f(x)}$.

b) À l'aide de l'approximation affine de g en 0, donner une valeur approchée de $g(0{,}01)$.

2) À l'aide de l'approximation affine de f en 0, donner une valeur approchée de $f(0{,}01)$ et en déduire une autre valeur approchée de $g(0{,}01)$.

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=x^3-3x-1$.

1) Dresser le tableau de variation de f et préciser la nature de ses extremums.

2) Montrer que $f(x)=0$ admet trois solutions a, b, c avec $-2<a<-1<b<1<c<2$.

3) Montrer que $f'(x)\neq 0$ pour $x\in\setminus\{a;b;c\setminus\}$.

4) Montrer que $f'(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$.

5) Montrer que $\dfrac{a}{f'(a)}+\dfrac{b}{f'(b)}+\dfrac{c}{f'(c)}=0$.

6) Montrer que pour $x\notin\setminus\{a;b;c\setminus\}$: $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}+\dfrac{1}{x-c}$.

7) En déduire $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=-3$ et $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=9$.

8) Calculer $\dfrac{1}{(a^3-1)^2}+\dfrac{1}{(b^3-1)^2}+\dfrac{1}{(c^3-1)^2}$.

Auto-évaluation : vrai ou faux ?

Affirmation	Vrai	Faux
1. Si $f'(x_0)=0$, f admet un extremum en x_0.	☐	☐
2. $(\sqrt{x^2+1})'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.	☐	☐
3. $((2x+1)^3)'=3(2x+1)^2$.	☐	☐
4. Une fonction de dérivée positive sur $\mathbb{R}^*$ est croissante sur $\mathbb{R}^*$.	☐	☐