COURS • 3ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 9 — Fonction dérivée et variations

◆ **Sommaire**

- 1. Fonction dérivée
- 2. Dérivées des fonctions usuelles
- 3. Opérations sur les fonctions dérivables
- 4. Dérivée de $x \mapsto f(ax+b)$ et de $\sqrt{u}$
- 5. Dérivée et sens de variation
- 6. Extremums
- 7. Applications : optimisation, inégalités, équations
- 8. Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir — Objectifs du programme officiel**

- Calculer la dérivée d'une fonction à l'aide des règles de dérivation.
- Déduire le sens de variation du signe de la dérivée ; dresser un tableau de variation ; déterminer les extremums.
- Résoudre des problèmes d'optimisation ; démontrer des inégalités.

1 Fonction dérivée

◆ **Définition**

- f est **dérivable sur un intervalle ouvert** I si elle est dérivable en tout réel de I.
- f est dérivable sur $[a\,;b]$ si elle est dérivable sur $]a\,;b[$, à droite en a et à gauche en b.
- La **fonction dérivée** de f est la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$.

2 Dérivées des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	Dérivable sur
k (constante)	0	IR
$ax+b$	a	IR
$x^n\ (n\in I N^*)$	$n x^{n-1}$	IR
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$
$\frac{1}{x^n}\ (n\in I N^*)$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	IR
$\cos x$	$-\sin x$	IR
$\tan x$	$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$	tout intervalle où $\cos x\neq 0$

3 Opérations sur les fonctions dérivables

Soit u et v dérivables sur un intervalle I et k un réel.

Fonction	Dérivée	Condition
$u+v$	$u'+v'$	
ku	ku'	
uv	$u'v+uv'$	
$u^n\ (n\in I N^*)$	$nu'u^{n-1}$	
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	v ne s'annule pas sur I
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	v ne s'annule pas sur I

◆ **Démonstration — dérivée d'un produit**

$\frac{u(x)v(x)-u(x_0)v(x_0)}{x-x_0}=\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}v(x)+u(x_0)\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}$. Comme v est continue en x_0 (dérivable), la limite vaut $u'(x_0)v(x_0)+u(x_0)v'(x_0)$.

◆ **Propriété — conséquences**

- Toute fonction polynôme est dérivable sur IR.
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur chaque intervalle de son ensemble de définition.

◆ **Exemple corrigé**

Calculer la dérivée de $f(x)=\dfrac{2x^2-3x}{x-2}$ sur $]2;+\infty[$.

Solution. $f'(x)=\dfrac{(4x-3)(x-2)-(2x^2-3x)}{(x-2)^2}=\dfrac{2x^2-8x+6}{(x-2)^2}=\dfrac{2(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$.

4 Dérivée de $x\mapsto f(ax+b)$ et de $\sqrt{u}$

◆ **Théorème**

- Si f est dérivable sur J, alors $g:x\mapsto f(ax+b)$ est dérivable en tout x tel que $ax+b\in J$, et $g'(x)=af'(ax+b)$.
- Si u est dérivable et **strictement positive** sur I, alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.
- En particulier : $(\sin(ax+b))'=a\cos(ax+b)$ et $(\cos(ax+b))'=-a\sin(ax+b)$.

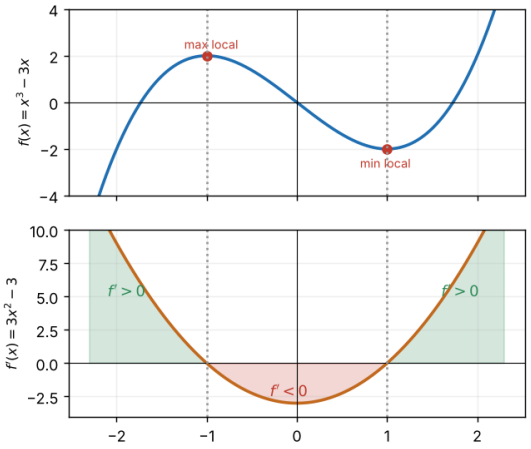
◆ **Exemple corrigé**

- $(\sqrt{x^2+1})'=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ sur IR.
- $(\sin(3x-\frac{\pi}{4}))'=3\cos(3x-\frac{\pi}{4})$; $((2x-1)^5)'=10(2x-1)^4$.

5 Dérivée et sens de variation

◆ **Théorème — f dérivable sur un intervalle I**

- f est croissante sur $I \Leftrightarrow f'(x)\geq 0$ pour tout $x\in I$; f est décroissante sur $I \Leftrightarrow f'(x)\leq 0$ sur I.
- f est constante sur $I \Leftrightarrow f'=0$ sur I.
- Si $f'(x)>0$ sur I, sauf peut-être en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est **strictement** croissante sur I (de même pour la stricte décroissance).



◆ Attention

Le théorème suppose que I est un **intervalle** : $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ a une dérivée négative sur $I R^*$ mais n'est pas décroissante sur $I R^*$ ($-1<1$ et $f(-1)<f(1)$).

◆ Méthode — étudier les variations

- Préciser l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité.
- Calculer $f'(x)$ et la **factoriser** ; étudier son signe.
- Dresser le tableau de variation (avec les limites aux bornes et les extremums).

◆ Exemple corrigé

Étudier les variations de $f(x)=x^3-3x$.

Solution. $f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

6 Extremums

◆ Théorème

- Si f est dérivable sur un intervalle **ouvert** I et admet un extremum local en $x_0 \in I$, alors $f'(x_0)=0$.
- Si f' s'annule en x_0 **en changeant de signe**, f admet un extremum local en x_0 : un maximum si f' passe de + à −, un minimum si f' passe de − à +.

◆ **Attention**

$f'(x_0)=0$ ne suffit pas : $x\mapsto x^3$ a une dérivée nulle en 0, sans changement de signe, et n'admet pas d'extremum en 0.

◆ **Exemple corrigé**

Pour $f(x)=\dfrac{2x^2-3x}{x-2}$: f' s'annule en 1 en passant de + à − (maximum local $f(1)=1$) et en 3 en passant de − à + (minimum local $f(3)=9$).

7 Applications : optimisation, inégalités, équations

◆ **Méthode — problème d'optimisation**

- Choisir une variable x et préciser l'intervalle dans lequel elle varie.
- Exprimer la grandeur à optimiser en fonction de x.
- Étudier les variations de cette fonction et conclure.

◆ **Exemple corrigé — boîte de volume maximal**

Dans un carré de côté 6 cm, on découpe aux quatre coins des carrés de côté x, puis on plie pour former une boîte sans couvercle.

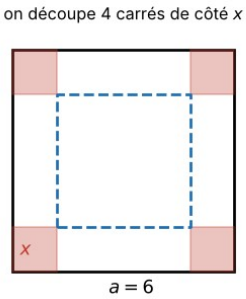
1) Exprimer le volume $V(x)$ de la boîte.

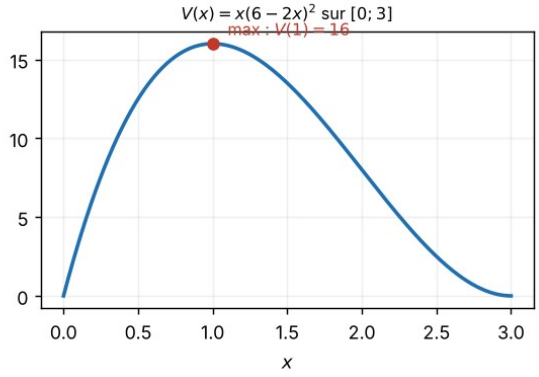
2) Déterminer x pour que ce volume soit maximal.

Solution.

1) La base est un carré de côté $6-2x$ et la hauteur vaut x : $V(x)=x(6-2x)^2$, pour $x\in[0;3]$.

2) $V'(x)=(6-2x)^2-4x(6-2x)=(6-2x)(6-6x)=12(3-x)(1-x)$. Sur $[0;3]$, V' est positive sur $[0;1]$ et négative sur $[1;3]$: le volume est maximal pour $x=1$, et vaut $V(1)=16$ cm³.





◆ **Méthode — démontrer une inégalité $f(x)\geq g(x)$**

On étudie les variations de $h=f-g$ et on montre que son minimum est positif ou nul.

◆ **Exemple corrigé**

Montrer que pour tout $x \geq 0$: $\sin x \leq x$.

Solution. $h(x) = x - \sin x$: $h'(x) = 1 - \cos x \geq 0$, donc h est croissante sur $[0 ; +\infty[$ et $h(x) \geq h(0) = 0$.

◆ **Méthode — nombre de solutions d'une équation**

Si f est continue et strictement monotone sur $[a ; b]$ et si k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a ; b]$ (chapitre Continuité). Le tableau de variation permet de compter les solutions sur chaque intervalle de monotonie.

★ Fiche mémo

Notion	À retenir
Produit, quotient	$(uv)' = u'v + uv'$; $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
Puissance, racine	$(u^n)' = nu'u^{n-1}$; $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ $(u>0)$
Affine	$(f(ax+b))' = af'(ax+b)$
Trigonométrie	$(\sin)' = \cos$; $(\cos)' = -\sin$; $(\tan)' = 1 + \tan^2$
Variations	signe de f' sur un **intervalle**
Extremum	f' s'annule **en changeant de signe**
Inégalité	étudier $h = f - g$ et son minimum