EXERCICES • 3ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 8 — Nombre dérivé

1 Dérivabilité en un point

Exercice 1

Soit $f(x)=\dfrac{2}{x}$ si $x>2$ et $f(x)=\dfrac{x}{2}$ si $x\leq 2$. Étudier la dérivabilité de f en 2 et indiquer les conséquences graphiques.

Exercice 1 bis

Soit f définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x-1}}$ si $x>1$ et $f(1)=m$.

1) Quelle valeur donner à m pour que f soit continue en 1 ?

2) Étudier alors la dérivabilité de f en 1.

3) Que peut-on dire de la courbe au point d'abscisse 1 ?

Exercice 2

Soit $f(x)=(x+1)^2$ si $x\leq -1$; $f(x)=(x+1)\sqrt{x+1}$ si $-1<x\leq 0$; $f(x)=\dfrac{2x+2}{x+2}$ si $x>0$.

1) Étudier la continuité de f en -1 et en 0.

2) Montrer que f est dérivable en -1 et interpréter graphiquement.

3) Vérifier que pour tout $x\in]-1;0[$: $\dfrac{f(x)-1}{x}=\sqrt{x+1}+\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

4) Étudier la dérivabilité de f en 0 ; écrire les équations des demi-tangentes au point A d'abscisse 0.

5) Soit $g(x)=\dfrac{2x+2}{x+2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

a) Montrer que g est dérivable en tout $a>0$ et calculer $g'(a)$.

b) Montrer que la courbe de g admet une tangente parallèle à $\Delta : x-3y+1=0$.

Exercice 3

Soit $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$.

1) Montrer que f est dérivable en tout x_0 et calculer $f'(x_0)$.

2) Déterminer a, b, c pour que la courbe admette au point d'abscisse 2 une tangente parallèle à l'axe des abscisses et au point d'abscisse 1 la tangente $\Delta : 2x+y-4=0$.

Exercice 4

Soit a réel et f dérivable sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{af(x)-xf(a)}{x-a}=af'(a)-f(a)$.

2) Calculer $\lim_{y \to x} \dfrac{y\,x^{2009} - x\,y^{2009}}{y - x}$.

Exercice 5

Soit $f(x) = x^2 + |x+2| - 1$ si $x < 1$ et $f(x) = (x-1)\sqrt{x-1} + 3x$ si $x \geq 1$.

1) Étudier la dérivabilité de f en -2 ; interpréter.

2) Montrer que f est dérivable en 1 et donner $f'(1)$.

3) En déduire $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(1+nh) - f(1)}{h}$ $(n \in \mathbb{Z}^*)$ puis $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(1+3h) - f(1-2h)}{h}$.

2 Problèmes

Exercice 6

Soit $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + 4 - x$ si $x \geq 1$; $f(x) = \dfrac{(m+1)x^3 - 3x + m^2}{x - 1}$ si $0 \leq x < 1$; $f(x) = x^2\sqrt{-x} + 2x - 1$ si $x < 0$.

1) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

2) Étudier suivant m la limite de f à gauche en 1.

3) Étudier suivant m la continuité de f en 1.

4) Étudier suivant m la dérivabilité de f en 1 et interpréter.

5) On prend $m = 1$ et $x_0 \in]0\,;1[$.

a) Montrer que f est dérivable en x_0.

b) Existe-t-il un point d'abscisse x_0 où la tangente est parallèle à $\Delta : 4x - y + 3 = 0$?

c) perpendiculaire à $\Delta' : x - 3y - 3 = 0$?

Exercice 7

Soient $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $g(x) = \sqrt{x+1}$, $h(x) = (1+x)^2$, $k(x) = (1+x)^3$, $m(x) = (1+x)^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

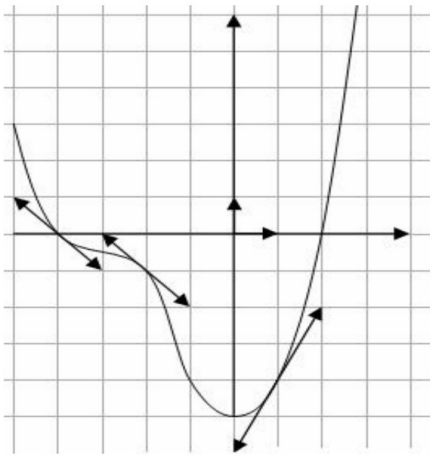
1) Justifier que ces fonctions sont dérivables en 0 ; calculer $f'(0)$ et $g'(0)$.

2) Donner les approximations affines de f et g au voisinage de 0.

3) Calculer alors des valeurs approchées de $\sqrt{1{,}0002}$, $\sqrt{0{,}995}$, $\dfrac{1}{0{,}996}$, $\dfrac{1}{1{,}0008}$, $0{,}97^2$, $0{,}97^3$, $0{,}97^{2008}$.

Exercice 8

La courbe ζ_f est représentée ci-dessous dans un repère orthonormé (avec ses tangentes aux points d'abscisses -4, -2 et 1).



1) Vrai ou faux :

a) $f'(-4)<0$;

b) $f'(1)<0$.

2) Par lecture graphique, calculer $f'(-4), f'(-2), f'(0), f'(1)$.

3) Vrai ou faux :

a) $T_{-4} \parallel T_{-2}$;

b) $T_{-4} \perp T_1$.

4) Résoudre $f'(x)<0$.

5) g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$, de courbe symétrique par rapport à la droite $x=1$, telle que $g(x)=f(x)$ pour $x \geq 1$. Étudier la dérivabilité de g en 1.

6) Sachant que pour $x \geq 1$, $f(x)=ax^2+bx+c$, établir que $g(x)=2x^2-2x-4$ si $x \geq 1$ et $g(x)=2x^2-6x$ si $x \leq 1$.

7) Calculer $g'(x_0)$ pour $x_0>1$ et pour $x_0<1$.

8) Existe-t-il un point d'abscisse $x_0>1$ où la tangente est parallèle à $\Delta : 3x-y+1=0$?

9) Un point d'abscisse $x_0<1$ où la tangente est perpendiculaire à $\Delta' : y-2x+1=0$?

10) Discuter suivant m le nombre de points d'intersection de ζ_g avec $D_m : y=x-m$. 11) Lorsque D_m coupe ζ_g en M' et M'', on note I le milieu de $[M'M'']$: ensemble des points I ?

Exercice 9

Un polynôme P est factorisable par B s'il existe un polynôme Q tel que $P=BQ$.

1) Montrer que si P est factorisable par $(x-a)^2$, alors $P(a)=P'(a)=0$.

2) On suppose $P(a)=0$ et $P(x)=(x-a)f(x)$. Montrer que si $P'(a)=0$ alors f est factorisable par $x-a$.

3) En déduire l'équivalence : P factorisable par $(x-a)^2 \Leftrightarrow P(a)=P'(a)=0$.

4) Montrer que $P(x)=x^4-2x^3-7x^2+20x-12$ est factorisable par $(x-2)^2$ et résoudre $P(x)=0$.

Auto-évaluation : vrai ou faux ?

Affirmation	Vrai	Faux
1. Une fonction dérivable en a est continue en a.	☐	☐
2. Une fonction continue en a est dérivable en a.	☐	☐
3. $x \mapsto \lvert x \rvert$ est dérivable en 0.	☐	☐
4. $x \mapsto \sqrt{x}$ admet en 0 une demi-tangente verticale.	☐	☐