COURS • 3ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 8 — Nombre dérivé

◆ **Sommaire**

- 1. Nombre dérivé en un réel
- 2. Interprétation graphique : tangente
- 3. Dérivabilité et continuité
- 4. Dérivabilité à droite, à gauche — demi-tangentes
- 5. Approximation affine
- 6. Nombres dérivés de référence
- 7. Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir — Objectifs du programme officiel**

- Étudier la dérivabilité d'une fonction en un réel à l'aide du taux de variation.
- Déterminer une équation de la tangente ; interpréter un point anguleux, une demi-tangente verticale, une tangente horizontale.
- Utiliser l'approximation affine pour calculer une valeur approchée.

1 Nombre dérivé en un réel

◆ **Définition**

Soit f définie sur un intervalle ouvert I contenant x_0. On dit que f est **dérivable en** x_0 si le taux de variation $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une **limite finie** quand x tend vers x_0.

Cette limite est le **nombre dérivé** de f en x_0, noté $f'(x_0)$:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

◆ **Exemple corrigé — avec la définition**

Montrer que $f(x)=x^2$ est dérivable en tout réel x_0 et calculer $f'(x_0)$.

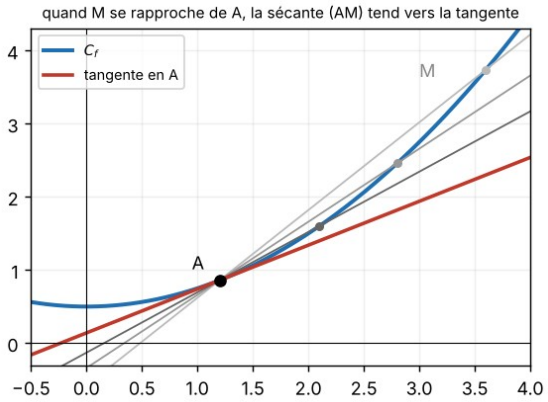
Solution. $\dfrac{(x_0+h)^2-x_0^{\,2}}{h}=\dfrac{2x_0h+h^2}{h}=2x_0+h$, qui tend vers $2x_0$ quand h tend vers 0. Donc $f'(x_0)=2x_0$.

◆ **Exemple corrigé — fonction inverse**

Calculer le nombre dérivé de $g(x)=\dfrac{1}{x}$ en $x_0\neq 0$.

Solution. $\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{x-x_0}=\dfrac{x_0-x}{x\,x_0(x-x_0)}=-\dfrac{1}{x\,x_0}$, qui tend vers $-\dfrac{1}{{x_0}^2}$: $g'(x_0)=-\dfrac{1}{{x_0}^2}$.

2 Interprétation graphique : tangente



◆ **Théorème**

Si f est dérivable en x_0, la courbe C_f admet au point $A(x_0;f(x_0))$ une **tangente** : c'est la droite passant par A de coefficient directeur $f'(x_0)$. Son équation est :

$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

◆ **Exemple corrigé**

Déterminer une équation de la tangente à la courbe de $f(x)=x^2$ au point d'abscisse 1.

Solution. $f(1)=1$ et $f'(1)=2$: $y=2(x-1)+1$, soit $y=2x-1$.

3 Dérivabilité et continuité

◆ **Théorème**

Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.

◆ **Démonstration**

Pour $x\neq x_0$: $f(x)=f(x_0)+(x-x_0)\times\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Quand x tend vers x_0, le produit tend vers $0\times f'(x_0)=0$, donc $f(x)$ tend vers $f(x_0)$.

◆ Attention — la réciproque est fausse

$x \mapsto |x|$ est continue en 0, mais $\dfrac{|x|}{x}$ vaut 1 pour $x>0$ et -1 pour $x<0$: pas de limite, donc pas dérivable en 0.

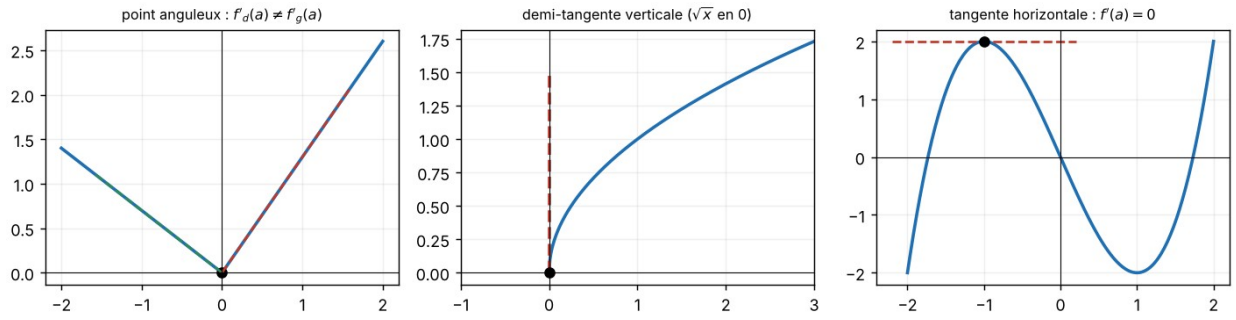
4 Dérivabilité à droite, à gauche — demi-tangentes

◆ Définition

- f est **dérivable à droite** en x_0 si $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie quand x tend vers x_0 par valeurs supérieures ; on la note $f'_d(x_0)$.
- On définit de même la **dérivabilité à gauche** et $f'_g(x_0)$.

◆ Théorème

f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 avec $f'_d(x_0)=f'_g(x_0)$.



Situation en x_0	Interprétation graphique au point $A(x_0;f(x_0))$
$f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$ finis et différents	**point anguleux** : deux demi-tangentes de coefficients $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$
taux de variation de limite $\pm\infty$ (à droite ou à gauche)	**demi-tangente verticale**
$f'(x_0)=0$	**tangente horizontale**

◆ **Exemple corrigé — point de raccordement**

$f(x)=\dfrac{x}{2}$ si $x\leq 2$ et $f(x)=\dfrac{2}{x}$ si $x>2$.

1) Vérifier que f est continue en 2.

2) Étudier la dérivabilité de f en 2 ; interpréter graphiquement.

Solution.

1) $f(2)=1$ et $\dfrac{2}{x}$ tend vers 1 quand x tend vers 2 : f est continue en 2.

2) À gauche : $\dfrac{\frac{x}{2}-1}{x-2}=\dfrac{1}{2}$. À droite : $\dfrac{\frac{2}{x}-1}{x-2}=\dfrac{2-x}{x(x-2)}=-\dfrac{1}{x}$, qui tend vers $-\dfrac{1}{2}$. $f'_g(2)=\dfrac{1}{2}\neq f'_d(2)=-\dfrac{1}{2}$: f n'est pas dérivable en 2 ; le point $A(2;1)$ est un point anguleux.

◆ **Exemple corrigé — racine carrée en 0**

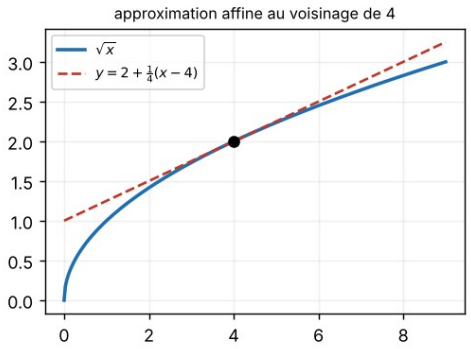
$\dfrac{\sqrt{x}-0}{x-0}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0^+ : $x\mapsto\sqrt{x}$ n'est pas dérivable à droite en 0 ; sa courbe admet à l'origine une demi-tangente verticale.

5 Approximation affine

◆ **Théorème**

Si f est dérivable en x_0, on peut écrire $f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+h\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$.

Pour h proche de 0 : $f(x_0+h)\approx f(x_0)+hf'(x_0)$. Graphiquement, la courbe est très proche de sa tangente au voisinage de A.



◆ **Exemple corrigé**

Donner une valeur approchée de $\sqrt{4{,}02}$ et de $\dfrac{1}{0{,}998}$.

Solution.

- $f(x)=\sqrt{x}$, $f'(4)=\dfrac{1}{2\sqrt{4}}=\dfrac{1}{4}$: $\sqrt{4{,}02}\approx 2+0{,}02\times\dfrac{1}{4}=2{,}005$.
- $g(x)=\dfrac{1}{x}$, $g'(1)=-1$: $\dfrac{1}{0{,}998}=g(1-0{,}002)\approx 1+0{,}002=1{,}002$.

6 Nombres dérivés de référence

$f(x)$	k (constante)	$ax+b$	x^n $(n\geq 1)$	$\dfrac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	$\sin x$	$\cos x$
$f'(x_0)$	0	a	$n{x_0}^{n-1}$	$-\dfrac{1}{{x_0}^2}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$ $(x_0>0)$	$\cos x_0$	$-\sin x_0$

◆ **Démonstration — cas de $\sin$ en x_0**

$\dfrac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h}=\sin x_0\times\dfrac{\cos h-1}{h}+\cos x_0\times\dfrac{\sin h}{h}$. Or $\dfrac{\sin h}{h}$ tend vers 1 et $\dfrac{\cos h-1}{h}=-h\times\dfrac{1-\cos h}{h^2}$ tend vers $0\times\dfrac{1}{2}=0$. D'où la limite $\cos x_0$.

★ Fiche mémo

Notion	À retenir
Nombre dérivé	$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (limite finie)
Tangente	$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$
Continuité	dérivable ⇒ continue ; réciproque fausse ($\lvert x\rvert$ en 0)
Droite / gauche	dérivable $\Leftrightarrow f'_d(x_0)=f'_g(x_0)$
Point anguleux	$f'_d(x_0)\neq f'_g(x_0)$
Demi-tangente verticale	taux de variation de limite infinie
Approximation affine	$f(x_0+h)\approx f(x_0)+hf'(x_0)$