EXERCICES • 3ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 7 — Trigonométrie

1 Calculs et formules

Exercice 1

Sans calculatrice, calculer :

1) $\cos\frac{\pi}{14}+\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{14}-\sin\frac{2\pi}{7}-\sin\frac{5\pi}{14}-\sin\frac{3\pi}{7}$

2) $\tan\frac{\pi}{9}+\tan\frac{2\pi}{9}+\tan\frac{\pi}{3}+\tan\frac{4\pi}{9}+\tan\frac{5\pi}{9}+\tan\frac{2\pi}{3}+\tan\frac{7\pi}{9}+\tan\frac{8\pi}{9}$

3) $\cos^2\frac{\pi}{5}+\cos^2\frac{2\pi}{5}+\sin^2\frac{3\pi}{5}+\sin^2\frac{4\pi}{5}$ 4) $\tan\frac{\pi}{12}\tan\frac{5\pi}{12}+\operatorname{cotan}\frac{\pi}{5}\tan\frac{4\pi}{5}$

5) $\sin^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{3\pi}{8}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\sin^2\frac{7\pi}{8}$ 6) $\cos^2\frac{2\pi}{8}+\cos^2\frac{4\pi}{8}+\cos^2\frac{6\pi}{8}+\cos^2\frac{8\pi}{8}$

7) $\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{3\pi}{12}+\sin^2\frac{5\pi}{12}+\sin^2\frac{7\pi}{12}+\sin^2\frac{9\pi}{12}+\sin^2\frac{11\pi}{12}$

Exercice 2

1) En remarquant que $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, calculer $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$, $\tan\frac{\pi}{12}$.

2) Démontrer que $\tan^2\frac{\pi}{12}+\tan^2\frac{5\pi}{12}=14$.

3) Calculer $\cos\frac{\pi}{8}$, $\sin\frac{\pi}{8}$, $\tan\frac{\pi}{8}$, $\tan\frac{5\pi}{8}$.

Exercice 3

$ACDE$ est un carré direct de côté 2 et ABC un triangle équilatéral indirect.

1) Montrer que ABE est isocèle, calculer ses angles et en déduire que $\left(\overrightarrow{EB},\overrightarrow{ED}\right)\equiv\frac{\pi}{12}[2\pi]$.

2) Soit H le projeté orthogonal de B sur $[ED]$: calculer BH et en déduire $\cos\frac{\pi}{12}$.

Exercice 4

Soit $\wp=\cos x\cos 2x\cos 4x$.

1) Montrer que $8\sin x\times\wp=\sin 8x$.

2) En déduire $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$.

Exercice 5

Soit $\ell = 2\sin x(\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x)$.

1) Montrer que $2\sin a\cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$.

2) Montrer que $\ell = \sin 7x - \sin x$.

3) En déduire $S = \sin^2\frac{2\pi}{7} + \sin^2\frac{4\pi}{7} + \sin^2\frac{6\pi}{7}$.

Exercice 6

1) Montrer que $\sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \cos x + \sin x$.

2) Montrer que $\sqrt{2}\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \cos x - \sin x$.

3) Pour $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$: montrer que $\frac{\cos 2x}{\sin 2x - 1} = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$.

4) En déduire que $\frac{\cos 2x}{\sin 2x - 1} = \text{cotan}(x - \frac{\pi}{4})$.

Exercice 7

1) Montrer que $\cos x + \cos(x + \frac{2\pi}{3}) + \cos(x - \frac{2\pi}{3}) = 0$.

2) Calculer alors $\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{11\pi}{7} + \cos\frac{17\pi}{7}$.

3) Montrer que $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a\cos b$.

4) En déduire que $\cos^2 x + \cos^2(x + \frac{2\pi}{3}) + \cos^2(x - \frac{2\pi}{3}) = \frac{3}{2}$.

Exercice 8

1) Pour $a, b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$: montrer que $\tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b}$.

2) Soit $x \in]-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}[$.

a) Montrer que $\tan(x - \frac{\pi}{3}) + \tan(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{4\sin 2x}{2\cos 2x - 1}$.

b) Montrer que $\cos x(2\cos 2x - 1) = \cos 3x$.

c) En déduire que $\tan(x - \frac{\pi}{3}) + \tan x + \tan(x + \frac{\pi}{3}) = 3\tan 3x$.

Exercice 9

Soit $\theta \in [0; \pi[$.

1) Montrer que $(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2})^2 = 1 + \sin\theta$.

2) Soit $M(x; y)$ avec $x = \frac{\cos\theta}{\sqrt{2+2\sin\theta}}$ et $y = \frac{1+\sin\theta}{\sqrt{2+2\sin\theta}}$: vérifier que $x^2 + y^2 = 1$.

3) Montrer que $x=\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ et $y=\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$. Quel est l'ensemble des points M quand θ décrit $[0;\pi[$?

2 Coordonnées polaires

Exercice 10

Dans un repère orthonormé direct, déterminer les coordonnées polaires de $A(1;\sqrt{3})$, $B(1;-\sqrt{3})$, $C(-1;\sqrt{3})$, $D(-1;-\sqrt{3})$.

Exercice 10 bis

Dans un repère orthonormé direct d'origine O, on considère le carré $OABC$ de centre S, avec $A(1;\sqrt{3})$ et $C(-\sqrt{3};1)$.

1) Faire une figure.

2) Déterminer un couple de coordonnées polaires de chacun des points A, C, B et S.

3) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\cos\frac{\pi}{12}$.

Exercice 11

Dans un repère orthonormé direct d'origine O, on considère les points $A(2;0)$, $B(\sqrt{3};1)$ et le point C tel que $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

1) Déterminer un couple de coordonnées polaires de B.

2) Placer les points A, B et C.

3) a) Déterminer la nature du quadrilatère $OACB$.

b) Déterminer les coordonnées cartésiennes, puis un couple de coordonnées polaires, du point C.

c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

4) Construire les ensembles $E=\{M[r,\theta]:\theta=\frac{\pi}{6},r\in[1;3]\}$ et $F=\{M[r,\theta]:\theta\in[\frac{\pi}{6};\frac{4\pi}{3}[,r=2\}$.

3 Équations et inéquations

Exercice 12

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\cos 3x-\cos 4x=0$.

2) Démontrer que $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$ et $\cos 4x=8\cos^4 x-8\cos^2 x+1$.

3) En déduire que les solutions de $8X^4-4X^3-8X^2+3X+1=0$ sont les $\cos\frac{2k\pi}{7}$, $k\in\{0;1;2;3\}$.

Exercice 13

Soit $a\in[0;\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2};\pi[$; on pose $x=\tan a$ et l'on considère $f(x)=\frac{\cos 4a}{\cos^4 a}$.

1) Montrer que $f(x)$ s'exprime en fonction de x seul ; donner cette expression et l'ensemble de définition de f.

2) Étudier les variations de f.

3) Tracer la courbe ξ de f.

4) Déterminer les valeurs de a correspondant aux points d'intersection de ξ avec l'axe des abscisses. En déduire les valeurs exactes de $\tan\frac{\pi}{8}$, $\tan\frac{3\pi}{8}$ et $\tan\frac{5\pi}{8}$.

Exercice 14

Pour $x\in[0;\frac{\pi}{2}]$, $f(x)=\sqrt{1+\sin 2x}+\sqrt{1-\sin 2x}$. Montrer que $f(x)=2\cos x$ sur $[0;\frac{\pi}{4}]$ et $f(x)=2\sin x$ sur $[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}]$.

Exercice 15

I. Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0;2\pi]$ et représenter les solutions sur le cercle : $2\sin x=\sqrt{3}$; $2\cos x=-1$; $2\cos(x-\frac{\pi}{6})=-1$; $\sin x=\cos x$; $\tan x=-\sqrt{3}$; $\cos x-\sin^2 x-1=0$.

II. Résoudre dans $[0;2\pi]$: $\sin x\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$; $2\cos x+1\geq 0$; $2\cos(x-\frac{\pi}{6})\leq -1$; $\tan x>-\sqrt{3}$.

Exercice 16

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sin(x-\frac{\pi}{3})-\sqrt{3}\cos(x-\frac{\pi}{3})=0$.

2) Dans $\mathbb{R}$: $\sin x-\sqrt{3}\cos x=\sqrt{2}$.

3) Dans $[-\pi;\pi]$: $\sin x-\sqrt{3}\cos x\geq\sqrt{2}$.

4) Dans $[-\pi;\pi]$: $3\cos x-2\sin^2 x+3=0$.

5) Dans $[-\pi;\pi]$: $3\cos x-2\sin^2 x+3\geq 0$.

6) Dans $[0;2\pi]$: $\frac{2\cos 2x-1}{1+2\cos 2x}\leq 0$.

Exercice 17

Montrer que l'aire d'un polygone régulier à n côtés de longueur b est $s=\frac{1}{4}nb^2\operatorname{cotan}\frac{\pi}{n}$.

4 Problèmes

Exercice 18

On considère les fonctions u et v définies sur IR par $u(x)=2\cos^2 x+\sqrt{3}\sin 2x+4\sin^2 x-1$ et $v(x)=3\sin x-4\sin^3 x+\cos(x+\frac{\pi}{6})$.

1) Déterminer des réels c, $r>0$ et $\varphi\in]0;\pi[$ tels que $u(x)=c-r\cos(2x+\varphi)$.

2) Résoudre dans $[0;\pi]$ l'équation $u(x)=1$.

3) Montrer que $u(x)=4\sin^2(x+\frac{\pi}{6})$.

4) Montrer que $v(x)=\sin 3x+\cos(x+\frac{\pi}{6})$.

5) Montrer que $v(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})\sin(x+\frac{\pi}{6})$.

6) Soit $f=\frac{u}{v}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition D de f.

b) Montrer que, pour tout $x\in D$, $f(x)=\frac{1}{\cos(x+\frac{\pi}{6})}$.

c) Résoudre dans $[0;\pi]\cap D$ l'inéquation $f(x)<\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Exercice 19

Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\sin 3x}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D de f.

2) Montrer que, pour tout $x\in D$, $f(x)=\frac{2\cos 2x}{\sin 3x}$.

3) a) Montrer que $\frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}}-\frac{1}{\cos\frac{\pi}{8}}=\frac{\sqrt{2}}{\cos\frac{\pi}{8}}$.

b) En déduire les valeurs exactes de $\sin\frac{\pi}{8}$ et $\cos\frac{\pi}{8}$.

4) a) Résoudre dans IR, puis dans $]0;2\pi]$, l'équation $\cos x+(\sqrt{2}-1)\sin x=1$.

b) Résoudre dans $]0;2\pi]$ l'inéquation $\cos x+(\sqrt{2}-1)\sin x\leq 1$.

5) Établir que $\frac{1}{\sin\frac{3\pi}{7}}+\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}}-\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}}=0$.

Exercice 20

Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{\sin 3x}{\sin x}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D de f.

2) Montrer que, pour tout $x\in D$, $f(x)=1+2\cos 2x$.

3) Résoudre dans D, puis dans $]0;2\pi[$:

a) l'équation $f(x)=0$;

b) l'inéquation $f(x)\leq 0$.

4) Calculer $f(\frac{\pi}{12})$ et en déduire $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\cos\frac{\pi}{12}$.

5) Pour $k\in\{1;2;3;4\}$, on pose $x_k=\frac{k\pi}{5}$. Calculer $s=f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)$.

6) En déduire la valeur de $p=\cos\frac{\pi}{5}-\frac{1}{4\cos\frac{\pi}{5}}$, puis celle de $\cos\frac{\pi}{5}$.

Auto-évaluation : vrai ou faux ?

Affirmation	Vrai	Faux
1. $\cos(\pi - x) = \cos x$.	☐	☐
2. $\sin 2x = 2\sin x \cos x$.	☐	☐
3. $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.	☐	☐
4. $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.	☐	☐