COURS • 3ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 7 — Trigonométrie

◆ **Sommaire**

- 1. Cosinus, sinus et tangente d'un réel
- 2. Valeurs remarquables
- 3. Angles associés
- 4. Formules d'addition
- 5. Formules de duplication et de linéarisation
- 6. Transformation de $a\cos x+b\sin x$
- 7. Transformations de sommes en produits
- 8. Équations et inéquations trigonométriques
- 9. Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir — Objectifs du programme officiel**

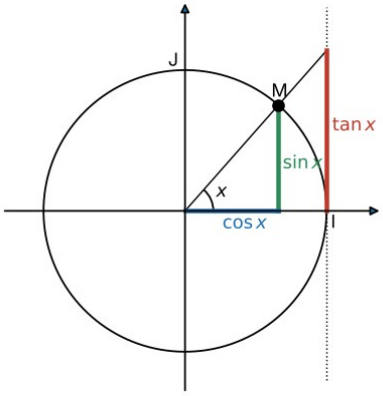
- Utiliser les angles associés et les formules d'addition et de duplication.
- Calculer des valeurs exactes ; transformer des expressions trigonométriques.
- Résoudre des équations et des inéquations trigonométriques ; représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

1 Cosinus, sinus et tangente d'un réel

◆ **Définition**

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{OI},\vec{OJ})$ et ζ est le cercle trigonométrique. À tout réel x on associe l'unique point M de ζ tel que $(\vec{OI},\vec{OM})\equiv x\ \ [2\pi]$.

- $\cos x$ et $\sin x$ sont respectivement l'abscisse et l'ordonnée de M.
- Pour $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$: $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$; c'est l'ordonnée du point d'intersection de (OM) avec la tangente à ζ en I.



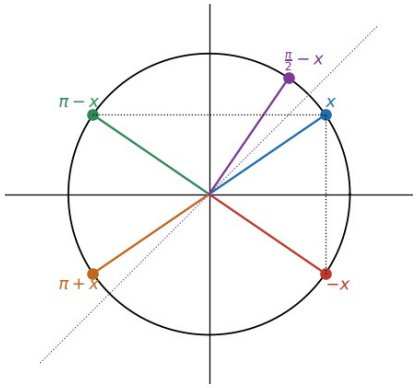
◆ **Propriété — pour tout réel x et tout entier k**

- $-1 \leq \cos x \leq 1$; $-1 \leq \sin x \leq 1$; $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$; $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$; $\tan(x + k\pi) = \tan x$.
- $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ (pour $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$).

2 Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0

3 Angles associés



Angle	cosinus	sinus	Symétrie
$-x$	$\cos x$	$-\sin x$	par rapport à (OI)
$\pi - x$	$-\cos x$	$\sin x$	par rapport à (OJ)
$\pi + x$	$-\cos x$	$-\sin x$	par rapport à O
$\frac{\pi}{2} - x$	$\sin x$	$\cos x$	par rapport à la droite $y = x$
$\frac{\pi}{2} + x$	$-\sin x$	$\cos x$	rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$

◆ **Exemple corrigé**

Simplifier $A = \cos(\pi - x) + \sin(\frac{\pi}{2} + x) + \cos(x + 3\pi) - \sin(\frac{\pi}{2} - x)$.

Solution. $A = -\cos x + \cos x - \cos x - \cos x = -2\cos x$ (car $\cos(x + 3\pi) = \cos(x + \pi) = -\cos x$).

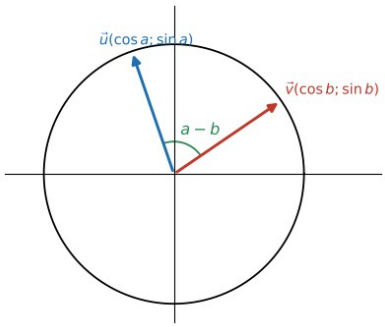
4 Formules d'addition

◆ **Théorème — pour tous réels a et b**

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$
$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \qquad \tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

(formules de la tangente valables lorsque les tangentes et le quotient sont définis).



◆ **Démonstration — par le produit scalaire**

Soit $\vec{u}(\cos a\,;\sin a)$ et $\vec{v}(\cos b\,;\sin b)$, unitaires, avec $(\vec{v},\vec{u})\equiv a-b\ \ [2\pi]$.

- Analytiquement : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\cos a\cos b+\sin a\sin b$.
- Géométriquement : $\vec{u}\cdot\vec{v}=1\times 1\times\cos(a-b)$. D'où la première formule.
- On remplace b par $-b$ pour $\cos(a+b)$; puis $\sin(a+b)=\cos(\frac{\pi}{2}-a-b)=\cos((\frac{\pi}{2}-a)-b)$ donne la troisième.

◆ **Exemple corrigé — valeurs exactes**

Calculer $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\tan\frac{\pi}{12}$.

Solution. $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$.

- $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
- $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
- $\tan\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}=2-\sqrt{3}$.

5 Formules de duplication et de linéarisation

◆ **Théorème**

$$\sin 2a=2\sin a\cos a$$

$$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$$

$$\tan 2a=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$$

Linéarisation : $\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$ et $\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$.

◆ **Démonstration**

On fait $b=a$ dans les formules d'addition, puis on utilise $\cos^2 a+\sin^2 a=1$.

◆ **Exemple corrigé**

Calculer $\cos\frac{\pi}{8}$.

Solution. $\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$ et $\cos\frac{\pi}{8}>0$, donc $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

◆ **Propriété — expression en fonction de $t=\tan\frac{a}{2}$**

Pour $a\neq\pi+2k\pi$: $\cos a=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin a=\frac{2t}{1+t^2}$ et, si $t^2\neq 1$, $\tan a=\frac{2t}{1-t^2}$.

6 Transformation de $a\cos x+b\sin x$

◆ **Théorème**

Soit $(a;b)\neq(0;0)$ et $\rho=\sqrt{a^2+b^2}$. Il existe un réel φ tel que $\cos\varphi=\frac{a}{\rho}$ et $\sin\varphi=\frac{b}{\rho}$, et pour tout réel x : $a\cos x+b\sin x=\rho\cos(x-\varphi)$.

◆ **Démonstration**

$(\frac{a}{\rho})^2+(\frac{b}{\rho})^2=1$: le point de coordonnées $(\frac{a}{\rho};\frac{b}{\rho})$ est sur le cercle trigonométrique, d'où l'existence de φ. Alors $a\cos x+b\sin x=\rho(\cos\varphi\cos x+\sin\varphi\sin x)=\rho\cos(x-\varphi)$.

◆ **Exemple corrigé**

$\cos x+\sqrt{3}\sin x$: $\rho=2$, $\cos\varphi=\frac{1}{2}$, $\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varphi=\frac{\pi}{3}$. Donc $\cos x+\sqrt{3}\sin x=2\cos(x-\frac{\pi}{3})$; cette expression varie entre -2 et 2.

7 Transformations de sommes en produits

◆ **Propriété — pour tous réels p et q**

$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \qquad \cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

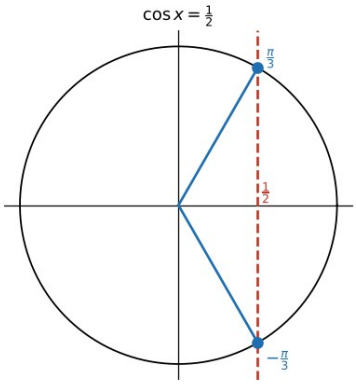
$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \qquad \sin p-\sin q=2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

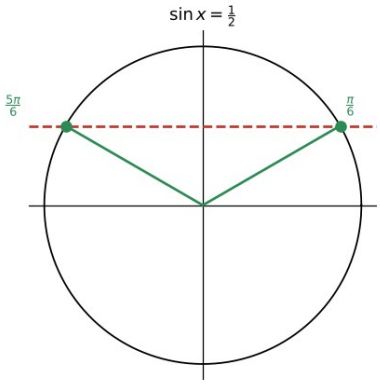
◆ **Démonstration**

On pose $a=\frac{p+q}{2}$, $b=\frac{p-q}{2}$: $p=a+b$, $q=a-b$. Par exemple $\cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cos a\cos b$.

8 Équations et inéquations trigonométriques

Équation	Solutions dans IR ($k\in\mathbb{Z}$)
$\cos x=\cos a$	$x=a+2k\pi$ ou $x=-a+2k\pi$
$\sin x=\sin a$	$x=a+2k\pi$ ou $x=\pi-a+2k\pi$
$\tan x=\tan a$	$x=a+k\pi$





◆ **Méthode**

- Ramener l'équation à l'une des formes du tableau (angles associés, formules, factorisation, $a\cos x+b\sin x=\rho\cos(x-\varphi)$).
- Pour une inéquation, lire les solutions sur le cercle trigonométrique, puis les écrire dans l'intervalle demandé.

◆ **Exemple corrigé — équation**

Résoudre dans IR : $\cos x+\sqrt{3}\sin x=1$, puis représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

Solution. L'équation s'écrit $2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1$, soit $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}$. Donc $x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$: $x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=2k\pi$. Deux points images sur le cercle.

◆ **Exemple corrigé — inéquation**

Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$: $\cos x \geq \dfrac{1}{2}$.

Solution. Sur le cercle, les points d'abscisse supérieure ou égale à $\dfrac{1}{2}$ forment l'arc d'extrémités $-\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{\pi}{3}$ contenant I : $S=[-\dfrac{\pi}{3}\,;\dfrac{\pi}{3}]$.

★ Fiche mémo

Notion	À retenir
Pythagore	$\cos^2 x+\sin^2 x=1\,;\,1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
Associés	$\cos(\pi-x)=-\cos x\,;\,\sin(\dfrac{\pi}{2}-x)=\cos x\,\ldots$
Addition	$\cos(a\pm b)=\cos a\cos b\mp\sin a\sin b\,;\,\sin(a\pm b)=\sin a\cos b\pm\cos a\sin b$
Duplication	$\sin 2a=2\sin a\cos a\,;\,\cos 2a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$
Linéarisation	$\cos^2 a=\dfrac{1+\cos 2a}{2}\,;\,\sin^2 a=\dfrac{1-\cos 2a}{2}$
$a\cos x+b\sin x$	$=\rho\cos(x-\varphi),\ \rho=\sqrt{a^2+b^2}$
Équations	$\cos x=\cos a \Leftrightarrow x=\pm a+2k\pi\,;\,\sin x=\sin a \Leftrightarrow x=a+2k\pi$ ou $\pi-a+2k\pi$