EXERCICES • 3ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 6 — Limites infinies et asymptotes

1 Limites et asymptotes

Exercice 1

Calculer :

a) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+x+1}{2x^2+x+1}$

b) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+x-x^3}{3x^2+x+1}$

c) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}$

d) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2+x+1}{1-x}$ (à droite)

e) $\lim_{x \to 2} \dfrac{3x^2-1}{4-2x}$ (à gauche)

f) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x\sqrt{x}-1}{x^2-1}$

Exercice 2

Soit $f(x)=\dfrac{x^2-3x-1}{x-2}$, de courbe ζ.

1) Calculer les limites de $f(x)$ et de $\dfrac{f(x)}{x}$ quand $|x|$ tend vers $+\infty$.

2) Montrer qu'il existe trois réels a, b, c tels que, pour tout $x \neq 2$: $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$.

3) En déduire une asymptote oblique Δ à ζ et étudier la position de ζ par rapport à Δ.

Exercice 3

Soit $f_a(x)=\dfrac{ax^2-x+1}{x-1}$, a réel.

1) Étudier suivant a la limite de f_a en 1. Interpréter.

2) Étudier suivant a les limites en $+\infty$ de $f_a(x)$ et de $\dfrac{f_a(x)}{x}$.

3) Pour $a \neq 0$, calculer $\lim_{x \to +\infty}(f_a(x)-x)$. Interpréter.

Exercice 5

Calculer :

a) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-2x-1)$

b) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}-2x}$

c) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+3})$.

Exercice 9

Soit $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}+ax$ si $x\le 1$ et $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-2}{x^2+x-2}$ si $x>1$; ζ sa courbe.

Partie A.

1) Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer a pour que f soit continue en 1. Dans la suite, $a=\dfrac{2}{3}$.

3) Déterminer le domaine de continuité de f.

Partie B.

1) Montrer que pour tout $x<0$: $f(x)=x\left(\dfrac{2}{3}-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\right)$; en déduire $\lim_{x\to-\infty}f(x)$.

2) a) Justifier que pour $x<0$: $\sqrt{x^2-x+1}-x\neq 0$.

b) Montrer que pour $x<0$: $f(x)+\dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{1+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}-\dfrac{1}{2}$.

c) Calculer $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+\dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{2}\right)$ et interpréter.

Partie C.

1) Calculer $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

2) Montrer qu'il existe a, b, c tels que pour $x>1$: $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+2}$.

3) Expliquer pourquoi $\Delta : y=x$ est asymptote à ζ en $+\infty$.

4) Position de ζ par rapport à Δ.

5) Pour $x>1$, M et P sont les points de ζ et Δ d'abscisse x.

a) Soit $k\in\mathbb{N}^*$: montrer que si $x>2(10^k-1)$ alors $MP<10^{-k}$.

b) Sans calcul, donner une approximation de $f(2000)$ et un majorant de l'erreur.

Auto-évaluation : vrai ou faux ?

Affirmation	Vrai	Faux
1. Si $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=0$, la droite $y=2x$ est asymptote en $+\infty$.	☐	☐
2. Une fonction rationnelle a toujours une asymptote oblique.	☐	☐
3. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=0$.	☐	☐
4. Si $\lim_{x\to 1}f(x)=+\infty$, la droite $x=1$ est asymptote verticale.	☐	☐