COURS • 3ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 6 — Limites infinies et asymptotes

◆ **Sommaire**

- 1. Limite infinie en un réel
- 2. Limites à l'infini
- 3. Limites de référence
- 4. Opérations et formes indéterminées
- 5. Polynômes et fonctions rationnelles à l'infini
- 6. Limites et ordre
- 7. Asymptotes : verticale, horizontale, oblique
- 8. Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir — Objectifs du programme officiel**

- Calculer des limites à l'infini et des limites infinies ; lever les formes indéterminées classiques.
- Utiliser la comparaison pour déterminer une limite infinie.
- Identifier les asymptotes d'une courbe et étudier la position relative de la courbe et d'une asymptote.

1 Limite infinie en un réel

◆ **Définition**

- f tend vers $+\infty$ en x_0 si pour tout réel $A>0$, il existe $\alpha>0$ tel que : $x\in D_f$ et $0<|x-x_0|<\alpha \Rightarrow f(x)>A$. On note $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$.
- f tend vers $-\infty$ en x_0 si $-f$ tend vers $+\infty$ en x_0.
- On définit de même les limites infinies à droite et à gauche en x_0.

◆ **Propriété — quotient $\frac{\ell}{0}$**

Si $\lim_{x\to x_0} u(x)=\ell\neq 0$ et $\lim_{x\to x_0} v(x)=0$, alors $\frac{u}{v}$ a une limite infinie en x_0 (éventuellement à droite et à gauche) ; son signe est donné par la règle des signes de ℓ et de $v(x)$, lue dans un tableau de signes.

◆ **Exemple corrigé**

Étudier la limite de $f(x)=\dfrac{3x^2-1}{4-2x}$ à gauche et à droite en 2.

Solution. Le numérateur tend vers $11>0$. Le dénominateur $4-2x$ tend vers 0 ; il est positif pour $x<2$ et négatif pour $x>2$. Donc $\lim_{x\to 2^-} f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to 2^+} f(x)=-\infty$.

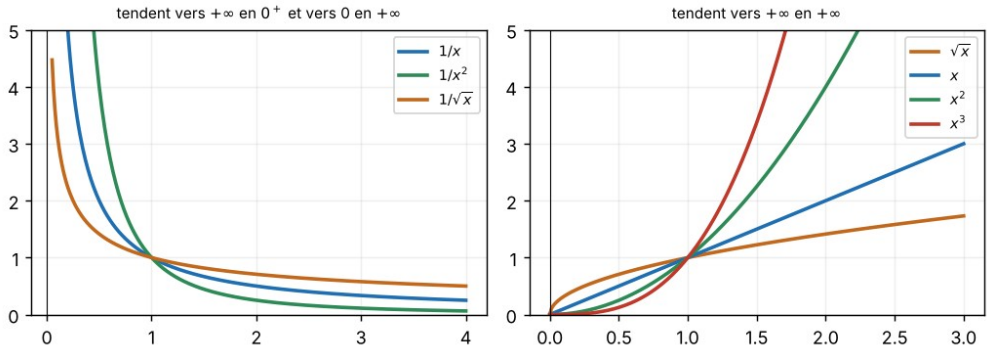
2 Limites à l'infini

◆ **Définition**

- f (définie sur un intervalle $[a;+\infty[$) tend vers le réel ℓ en $+\infty$ si pour tout $\beta>0$ il existe $B>0$ tel que : $x>B \Rightarrow |f(x)-\ell|<\beta$.
- f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ si pour tout $A>0$ il existe $B>0$ tel que : $x>B \Rightarrow f(x)>A$.
- Les définitions en $-\infty$ sont analogues (on remplace $x>B$ par $x<-B$).

3 Limites de référence

Fonction	en $+\infty$	en $-\infty$	en 0^+	en 0^-
x^n $(n\geq 1)$	$+\infty$	$+\infty$ si n pair, $-\infty$ si n impair	0	0
$\dfrac{1}{x^n}$ $(n\geq 1)$	0	0	$+\infty$	$+\infty$ si n pair, $-\infty$ si n impair
$\sqrt{x}$	$+\infty$	—	0	—
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	0	—	$+\infty$	—



4 Opérations et formes indéterminées

Les règles usuelles s'appliquent (somme, produit, quotient), sauf dans les **formes indéterminées** :

Forme indéterminée	Exemple de technique
$+\infty-\infty$	factoriser par le terme dominant ; quantité conjuguée
$0\times\infty$	transformer en quotient
$\frac{\infty}{\infty}$	factoriser numérateur et dénominateur par leurs termes dominants
$\frac{0}{0}$	factoriser par $(x-x_0)$; quantité conjuguée

◆ **Exemple corrigé — conjugué en $+\infty$**

Calculer $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)$.

Solution. Forme $+\infty-\infty$. On multiplie par la quantité conjuguée :

$$\sqrt{x^2+x+1}-x=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}$$ pour $x>0$, qui tend vers $\frac{1}{2}$.

5 Polynômes et fonctions rationnelles à l'infini

◆ **Théorème**

- En $+\infty$ et en $-\infty$, une fonction polynôme a la même limite que son terme de plus haut degré.
- En $+\infty$ et en $-\infty$, une fonction rationnelle a la même limite que le quotient des termes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur.

◆ **Démonstration**

Si $p(x)=a_nx^n+\ldots+a_0$ avec $a_n\neq0$, on écrit, pour $x\neq0$: $p(x)=a_nx^n\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_nx}+\ldots+\frac{a_0}{a_nx^n}\right)$. La parenthèse tend vers 1. Pour une fraction, on factorise de même le numérateur et le dénominateur.

◆ **Exemple corrigé**

- $\lim_{x\to-\infty}\left(-2x^3+5x^2-1\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-2x^3\right)=+\infty$.
- $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1}{2x^2+x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$.
- $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x-x^3}{3x^2+x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^3}{3x^2}=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{x}{3}\right)=+\infty$.

6 Limites et ordre

◆ Théorème — comparaison

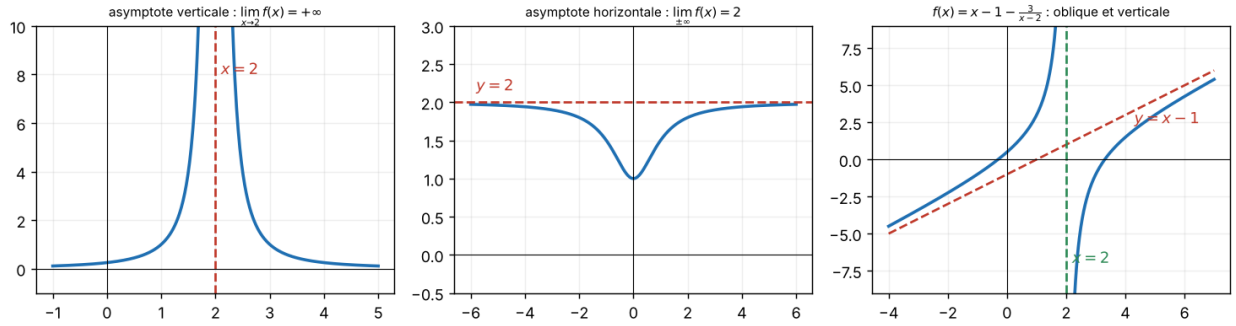
- Si $f(x) \geq g(x)$ au voisinage de $+\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
- Si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de $+\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.
- Théorème des gendarmes : si $u \leq f \leq v$ et u, v tendent vers le même réel ℓ en $+\infty$, alors f tend vers ℓ.

Ces résultats restent valables en $-\infty$ et en un réel x_0.

◆ Exemple corrigé

Pour $x > 0$: $x + \sin x \geq x - 1$ et $\lim_{x \to +\infty} (x - 1) = +\infty$, donc $\lim_{x \to +\infty} (x + \sin x) = +\infty$. De même $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \frac{1}{x}$ donne $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

7 Asymptotes : verticale, horizontale, oblique



Situation	Interprétation graphique
$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ (ou à droite / à gauche)	la droite d'équation $x = x_0$ est asymptote verticale à C_f
$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$	la droite d'équation $y = b$ est asymptote horizontale à C_f en $\pm\infty$
$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$	la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à C_f en $\pm\infty$

◆ Méthode — trouver une asymptote oblique

- Écrire $f(x) = ax + b + \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to \pm\infty} \varepsilon(x) = 0$ (division euclidienne pour une fraction rationnelle) ;
- ou bien calculer $a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ (réel non nul) puis $b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax)$ (réel).
- **Position relative** : le signe de $f(x) - (ax+b)$ indique si C_f est au-dessus ou au-dessous de l'asymptote.

◆ Exemple corrigé — une fraction rationnelle

$f(x)=\dfrac{x^2-3x-1}{x-2}$.

1) Montrer que $f(x)=x-1-\dfrac{3}{x-2}$.

2) En déduire les asymptotes de C_f et la position relative de C_f et de l'asymptote oblique.

Solution.

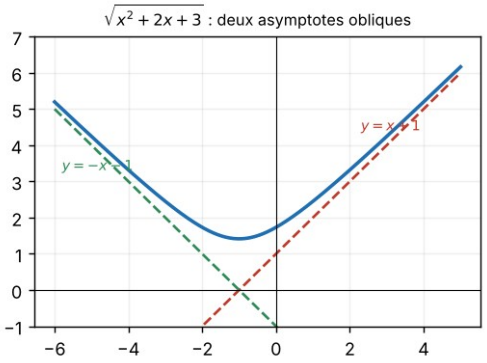
1) $(x-1)(x-2)-3=x^2-3x+2-3=x^2-3x-1$.

2) $\dfrac{3}{x-2}$ tend vers 0 en $\pm\infty$: $y=x-1$ est asymptote oblique. $\lim_{x\to 2^+} f(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to 2^-} f(x)=+\infty$: $x=2$ est asymptote verticale. $f(x)-(x-1)=-\dfrac{3}{x-2}$ est positif pour $x<2$ (courbe au-dessus) et négatif pour $x>2$ (courbe au-dessous).

◆ Exemple corrigé — une racine carrée

Déterminer les asymptotes en $\pm\infty$ de la courbe de $g(x)=\sqrt{x^2+2x+3}$.

Solution. $g(x)-(x+1)=\dfrac{x^2+2x+3-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x+3}+x+1}=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+2x+3}+x+1}$, qui tend vers 0 en $+\infty$: $y=x+1$ est asymptote en $+\infty$. De même $g(x)-(-x-1)=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+2x+3}-x-1}$ tend vers 0 en $-\infty$: $y=-x-1$ est asymptote en $-\infty$.



Fiche mémo

Notion	À retenir
$\frac{\ell}{0}$ avec $\ell \neq 0$	limite infinie ; signe par tableau de signes
Polynôme en $\pm\infty$	terme de plus haut degré
Rationnelle en $\pm\infty$	quotient des termes de plus haut degré
Formes indéterminées	$\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$: transformer l'écriture
Comparaison	$f \geq g$ et $g \to +\infty \Rightarrow f \to +\infty$
Asymptotes	$x = x_0$; $y = b$; $y = ax+b$ si $f(x) - (ax+b) \to 0$
Oblique	$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - ax)$