EXERCICES • 3ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 5 — Limites finies et continuité

1 Calculs de limites

Exercice 1

Calculer :

a) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$

b) $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$

c) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$

d) $\lim_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x+6}-4}{\sqrt{x+4}-3}$

e) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^3+2x-12}{x^3-8}$

f) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{(x-2)^2-4}$

g) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{2x^2+7}-5}{x^2-1}$

h) $\lim_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{3x}-3}{\sqrt{x+1}-2}$

i) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}-2}$

2 Continuité et prolongement

Exercice 2

Soit $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=a$. Déterminer D_f, la valeur de a rendant f continue en 0, et l'ensemble de continuité de f selon a.

Exercice 3

Soit $f(x)=mx+\dfrac{x^2-9}{x-3}$ si $x>3$ et $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ si $x<3$. Calculer les limites de f à droite et à gauche en 3. Pour quelle valeur de m f est-elle prolongeable par continuité en 3 ?

Exercice 4

Soit $f(x)=x+a+\sqrt{x^2+x+1}$ si $x<-1$; $f(x)=\dfrac{ax-b+a}{2x+4}$ si $|x|\leq 1$; $f(x)=\dfrac{2}{3}bx-\dfrac{\sqrt{x^2+3}+2}{x+1}$ si $x>1$.

1) Prouver que $D_f=\mathbb{R}$.

2) Calculer les limites de f à gauche et à droite en -1 ; trouver une relation entre a et b pour que f soit continue en -1.

3) Calculer les limites de f à gauche et à droite en 1 ; trouver une deuxième relation pour que f soit continue en 1.

4) Déterminer a et b pour que f soit continue en -1 et en 1.

Exercice 5

Soit $f(x)=\dfrac{x+1}{2x-3}$ si $x\leq 1$; $f(x)=\dfrac{2m-x}{2-x}$ si $1<x\leq\dfrac{3}{2}$; $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+2x-4}$ si $x>\dfrac{3}{2}$.

1) Trouver m pour que f soit continue en 1.

2) Pour cette valeur de m, étudier la continuité de f en $\dfrac{3}{2}$.

Exercice 6

Soit $f(x)=(1+3a)x^2-3x$ si $x\leq\dfrac{1}{2}$; $f(x)=\dfrac{x^3-8}{2x^2-5x+2}$ si $\dfrac{1}{2}<x<2$; $f(x)=\sqrt{4x^2-1}-ax-1$ si $x\geq 2$.

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Étudier les limites de f en $-\infty$, en $+\infty$, à droite en $\dfrac{1}{2}$ et à gauche en 2.

3) Peut-on déterminer a pour que f soit continue en 2 ? 4) Préciser suivant a l'ensemble de continuité de f.

Exercice 7

Soit $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^3-7x^2+x+5}$ pour $x\neq 1$ et $f(1)=a$.

1) Déterminer D_f.

2) Déterminer a pour que f soit continue en 1.

Exercice 8

Soit $f(x)=\dfrac{x^{2009}-1}{x-1}$ si $x\neq 1$ et $f(1)=2009$.

1) Vérifier que $1-x^{2009}=(1-x)(1+x+x^2+\ldots+x^{2008})$.

2) En déduire que f est continue en 1.

3) Calculer $\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2009}{x-1}$.

Exercice 9

Calculer $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}$ et $\lim_{x\to 3}\dfrac{3x-9}{\sqrt{x+1}-2}$.

Exercice 10

Soit $f(x)=\dfrac{x^2+ax-2}{x-1}$ si $x>1$ et $f(x)=bx+1$ si $x\leq 1$.

1) Pour quelle valeur de a la fonction f a-t-elle une limite finie à droite en 1 ? Calculer cette limite.

2) En déduire b pour que f soit continue en 1.

Exercice 11

Soit $f(x)=\dfrac{x^2+\sin x}{x^2+1}$.

1) Montrer que pour tout réel x : $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\leq f(x)\leq 1$.

2) Soit $g(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$ pour $x\neq 0$. Montrer que g se prolonge par continuité en 0.

Exercice 12

Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ et, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1}$.

Auto-évaluation : vrai ou faux ?

Affirmation	Vrai	Faux
1. Si f est continue en a, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$.	☐	☐
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}=0$.	☐	☐
3. Une fonction non définie en a ne peut pas avoir de limite en a.	☐	☐
4. $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$.	☐	☐