COURS • 3ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 5 — Limites finies et continuité

◆ **Sommaire**

- 1. Limite finie d'une fonction en un réel
- 2. Limite à droite, limite à gauche
- 3. Opérations sur les limites finies
- 4. Formes indéterminées du type $\frac{0}{0}$
- 5. Limites et ordre — théorème des gendarmes
- 6. Une limite de référence : $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$
- 7. Prolongement par continuité
- 8. Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir — Objectifs du programme officiel**

- Calculer une limite finie en un réel ; lever une indétermination du type $\frac{0}{0}$.
- Utiliser les limites à droite et à gauche pour étudier la continuité d'une fonction définie par morceaux.
- Utiliser les théorèmes de comparaison pour déterminer une limite.
- Prolonger une fonction par continuité.

1 Limite finie d'une fonction en un réel

◆ **Définition**

Soit f définie sur un intervalle ouvert contenant x_0, sauf peut-être en x_0, et ℓ un réel. On dit que f **admet pour limite ℓ en x_0** si pour tout $\beta>0$, il existe $\alpha>0$ tel que :

$x \in D_f$ et $0<|x-x_0|<\alpha \Rightarrow |f(x)-\ell|<\beta$.

Cette limite, si elle existe, est unique ; on note $\lim_{x \to x_0} f(x)=\ell$.

◆ **Théorème — lien avec la continuité**

Si f est définie en x_0 : f est continue en x_0 si et seulement si $\lim_{x \to x_0} f(x)=f(x_0)$.

◆ Propriété — conséquences

- Pour tout polynôme p : $\lim_{x \to x_0} p(x) = p(x_0)$.
- Pour toute fonction rationnelle q définie en x_0 : $\lim_{x \to x_0} q(x) = q(x_0)$.
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{x \to x_0} (f(x) - \ell) = 0 \iff \lim_{x \to 0} f(x_0 + h) = \ell$ (changement de variable $x = x_0 + h$).

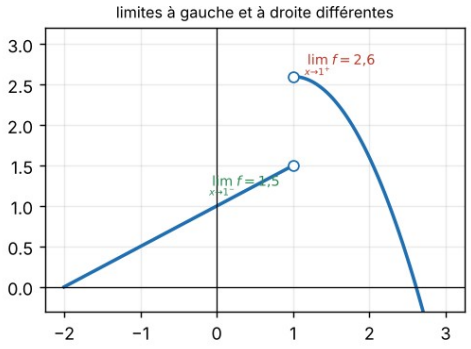
2 Limite à droite, limite à gauche

◆ Définition

- f a pour **limite à droite** ℓ en x_0 si la restriction de f à $]x_0 ; x_0 + r[$ a pour limite ℓ en x_0 ; on note $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$.
- On définit de même la **limite à gauche**, notée $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$.

◆ Théorème

f admet une limite ℓ en x_0 si et seulement si f admet en x_0 une limite à droite et une limite à gauche égales à ℓ.



◆ Exemple corrigé — valeur absolue

Étudier la limite en 0 de $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$.

Solution. Pour $x > 0$, $f(x) = 1$; pour $x < 0$, $f(x) = -1$. Les limites à droite (1) et à gauche (-1) sont différentes : f n'a pas de limite en 0.

3 Opérations sur les limites finies

Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell'$ (ℓ, ℓ' réels), alors :

Fonction	$f+g$	kf	fg	$\dfrac{f}{g}$ ($\ell' \neq 0$)	$\lvert f \rvert$	$\sqrt{f}$ ($f \geq 0$)
Limite en x_0	$\ell + \ell'$	$k\ell$	$\ell\ell'$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	$\lvert \ell \rvert$	$\sqrt{\ell}$

◆ Théorème — limite d'une composée

Si $\lim_{x \to x_0} u(x) = b$ et si v est continue en b, alors $\lim_{x \to x_0} v(u(x)) = v(b)$.

◆ Exemple corrigé

$\lim_{x \to 2} \sqrt{x^2+5} = \sqrt{9} = 3$: $x \mapsto x^2+5$ tend vers 9 et la racine carrée est continue en 9.

4 Formes indéterminées du type $\frac{0}{0}$

◆ Attention

Lorsque le numérateur et le dénominateur tendent tous deux vers 0, on ne peut pas conclure directement : il faut **transformer l'écriture**.

◆ Méthode — factoriser par $(x - x_0)$

Si p est un polynôme tel que $p(x_0) = 0$, alors $p(x) = (x - x_0)q(x)$ avec q polynôme. On simplifie par $x - x_0$.

Exemple : $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x+2) = 3$.

◆ Méthode — multiplier par la quantité conjuguée

On utilise $(\sqrt{A} - B)(\sqrt{A} + B) = A - B^2$.

Exemple : $\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1} = \frac{x+8-9}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)} = \frac{1}{\sqrt{x+8}+3}$, donc la limite en 1 vaut $\frac{1}{6}$.

◆ Exemple corrigé — taux de variation

Calculer $\lim_{x \to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$ et $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

Solution.

- $x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4)$ donc la limite vaut $4+4+4 = 12$.
- On multiplie par le conjugué : $\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \frac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$, qui tend vers $\frac{2}{2} = 1$.

5 Limites et ordre — théorème des gendarmes

◆ Théorème — passage à la limite dans une inégalité

Si $f(x)\le g(x)$ pour tout x d'un voisinage de x_0 (sauf peut-être en x_0) et si f et g ont des limites finies en x_0, alors $\lim_{x\to x_0} f(x)\le \lim_{x\to x_0} g(x)$.

◆ Théorème — des gendarmes

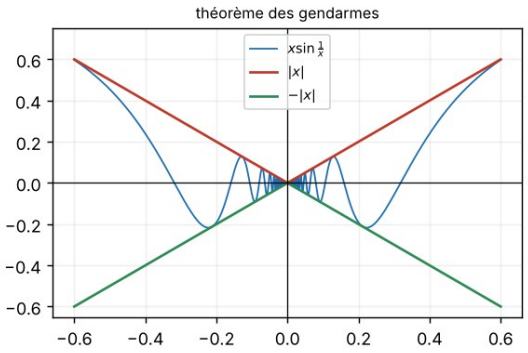
- Si $u(x)\le f(x)\le v(x)$ au voisinage de x_0 et si $\lim_{x\to x_0} u(x)=\lim_{x\to x_0} v(x)=\ell$, alors $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$.
- Cas particulier : si $|f(x)-\ell|\le v(x)$ et $\lim_{x\to x_0} v(x)=0$, alors $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$.

◆ Démonstration

Soit $\beta>0$. Il existe $\alpha_1>0$ tel que $0<|x-x_0|<\alpha_1 \Rightarrow \ell-\beta<u(x)$, et $\alpha_2>0$ tel que $0<|x-x_0|<\alpha_2 \Rightarrow v(x)<\ell+\beta$. Pour α le plus petit de α_1, α_2 (et du rayon du voisinage) : $\ell-\beta<u(x)\le f(x)\le v(x)<\ell+\beta$, donc $|f(x)-\ell|<\beta$.

◆ Exemple corrigé

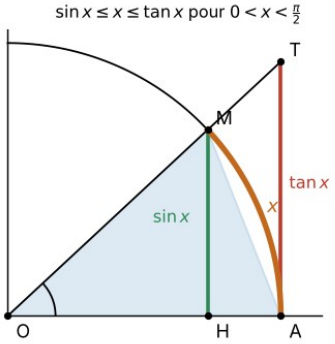
Pour $x\neq 0$: $|x\sin\frac{1}{x}|\le|x|$ et $\lim_{x\to 0}|x|=0$, donc $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$.



6 Une limite de référence : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

◆ Théorème

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$; on en déduit $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$ et $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$.



◆ **Démonstration**

Pour $0<x<\frac{\pi}{2}$, on compare les aires du triangle OAM, du secteur OAM et du triangle OAT :

$\frac{\sin x}{2}\leq\frac{x}{2}\leq\frac{\tan x}{2}$.

D'où $\cos x\leq\frac{\sin x}{x}\leq 1$. Cet encadrement reste vrai pour $-\frac{\pi}{2}<x<0$ par parité. Comme $\lim_{x\to 0}\cos x=1$, le théorème des gendarmes donne $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Enfin $\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$, qui tend vers $\frac{1}{2}$.

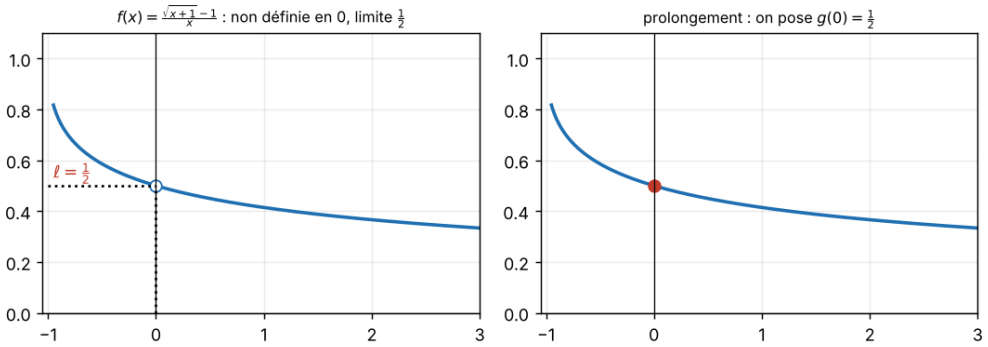
◆ **Exemple corrigé**

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}3\times\frac{\sin 3x}{3x}=3$ (on pose $X=3x$, qui tend vers 0).

7 Prolongement par continuité

◆ **Définition**

Soit f non définie en x_0 mais admettant une limite finie ℓ en x_0. La fonction g définie sur $D_f\cup\{x_0\}$ par $g(x)=f(x)$ si $x\in D_f$ et $g(x_0)=\ell$ est continue en x_0 : c'est le **prolongement par continuité** de f en x_0.



◆ **Exemple corrigé**

$f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ est définie sur $[-1;0[\cup]0;+\infty[$.

1) Calculer $\lim_{x\to 0} f(x)$.

2) En déduire que f est prolongeable par continuité en 0 et définir ce prolongement.

Solution.

1) $f(x)=\dfrac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}$, qui tend vers $\dfrac{1}{2}$.

2) La limite est finie : le prolongement g est défini par $g(x)=f(x)$ si $x\neq 0$ et $g(0)=\dfrac{1}{2}$.

★ Fiche mémo

Notion	À retenir
Continuité	f continue en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$
Droite / gauche	limite en $x_0 \Leftrightarrow$ limites à droite et à gauche égales
$\dfrac{0}{0}$	factoriser par $(x-x_0)$ ou multiplier par le conjugué
Composée	$u\to b$ et v continue en $b \Rightarrow v\circ u\to v(b)$
Gendarmes	$u\le f\le v$, u et $v\to\ell \Rightarrow f\to\ell$
Référence	$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$; $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$
Prolongement	limite finie ℓ en $x_0 \Rightarrow$ on pose $g(x_0)=\ell$