EXERCICES • 3ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 4 — Angles orientés

1 Mesures et configurations

Exercice 1

M et N sont deux points du cercle trigonométrique et α une mesure de l'arc orienté MN. Trouver la mesure de cet arc appartenant à $[0;2\pi[$ lorsque :

1) $\alpha=\dfrac{17\pi}{2}$;

2) $\alpha=-\dfrac{26\pi}{3}$;

3) $\alpha=\dfrac{509\pi}{15}$;

4) $\alpha=\dfrac{2009\pi}{4}$.

Exercice 2

Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{Ox},\vec{Oy})$ de mesure α :

1) $\alpha=\dfrac{7\pi}{2}$;

2) $\alpha=\dfrac{117\pi}{13}$;

3) $\alpha=-\dfrac{71\pi}{3}$.

Exercice 3

Soient a, b réels, $b\neq 0$, et $(\vec{Ox},\vec{Oy})$ de mesure $\alpha=\dfrac{a\pi}{b}$. Montrer que $\beta=\dfrac{a\pi}{b}+2\pi E\left(\dfrac{b-a}{2b}\right)$ est la mesure principale de $(\vec{Ox},\vec{Oy})$, où E désigne la partie entière.

Exercice 4

Soit A, B, C, D quatre points du plan orienté tels que $(\vec{AB},\vec{AD})\equiv-\dfrac{\pi}{4}$, $(\vec{BA},\vec{BD})\equiv\dfrac{7\pi}{12}$ et $(\vec{DA},\vec{DC})\equiv-\dfrac{2\pi}{3}$ (modulo 2π).

1) Déterminer les mesures principales de $(\vec{AD},\vec{DC})$ et $(\vec{DB},\vec{AB})$.

2) En déduire la mesure principale de $(\vec{DB},\vec{DC})$. Que peut-on dire du triangle BCD ?

Exercice 5

A, B, C, D sont quatre points distincts d'un cercle de centre O tels que $(AB) \perp (CD)$; M est le milieu de $[BC]$ et $[AB] \cap [CD] = \{P\}$.

1) Montrer que $(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PC}) \equiv (\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CM})\ [2\pi]$.

2) Montrer que $(MP) \perp (AD)$.

Exercice 6

ABC est rectangle en C avec $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$; ACD est équilatéral direct ; CBE est isocèle en B avec $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE}) \equiv -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$. Montrer que D, C, E sont alignés.

Exercice 7

ABC est rectangle en A avec $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$; Δ est la médiatrice de $[BC]$, I le milieu de $[BC]$, D le symétrique de A par rapport à Δ ; Δ coupe $[AC]$ en O.

1) Donner une mesure de $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BO})$.

2) Vérifier que ABI est équilatéral.

3) Déterminer $(\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{IA})$.

4) En déduire que $ABID$ est un losange.

2 Angle inscrit

Exercice 8

(C) est un cercle de centre O, A et B deux points de (C) tels que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$, M un point de (C) distinct de A et B.

1) a) Comparer $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO})$ et $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AM})$, puis $(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB})$ et $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BO})$.

b) Montrer que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{OB})\ [2\pi]$.

c) En déduire que $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})\ [2\pi]$.

2) Soit C le point de (C) tel que ABC soit isocèle en C et direct.

a) Mesure principale de $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

b) Calculer $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ et $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AC})$.

3) Soit B' diamétralement opposé à B et D le point de (C) tel que $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

a) Prouver que $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{AB'}$ sont colinéaires.

b) En déduire que (AB') et (BD) sont parallèles et la nature du quadrilatère $ABDB'$.

Exercice 9

Soit ABC un triangle équilatéral direct et O le centre de son cercle circonscrit.

1) a) Déterminer les mesures principales de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO})$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$.

b) Montrer que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

2) On considère deux points E et F tels que les demi-droites $[AE\backslash)$ et $[BF\backslash)$ soient parallèles et de sens contraires avec $AE=BF=AB$ et $(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB})\equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

a) Déterminer une mesure de $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BF})$.

b) En déduire la nature du quadrilatère $AECB$.

Exercice 10

A et B sont deux points distincts. Déterminer l'ensemble des points M tels que : $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})\equiv 0[2\pi]$; $\equiv\pi[2\pi]$; $\equiv 0[\pi]$; $\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$; $\equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$; $\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$; $\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$; $\equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi]$; $\equiv\frac{7\pi}{4}[2\pi]$.

3 Deux cercles

Exercice 11

Deux cercles ζ et ζ' se coupent en A et B. $M\in\zeta$, distinct de A et B ; (MA) et (MB) recoupent ζ' en M' et N'. Montrer que $(M'N')$ est parallèle à la tangente en M à ζ.

Exercice 12

ζ et ζ' se coupent en A et B ; M, N sont deux points de ζ ; (AM) et (BN) recoupent ζ' en M' et N'. Montrer que $(MN)\parallel(M'N')$.

Exercice 13

Soit ζ un cercle fixe de centre O, Δ une droite fixe, A un point fixe de ζ et B un point fixe de Δ. Un cercle variable passant par A et B recoupe ζ en C et Δ en D.

1) Comparer (CA,CD) et (BA,BD).

2) La droite (CD) recoupe ζ en M ; soit α une mesure de (BA,BD).

a) Montrer que $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})\equiv 2\alpha[2\pi]$.

b) En déduire que M est fixe.

3) La droite (AB) recoupe ζ en N. Montrer que $(MN)\parallel\Delta$.

Exercice 14

Dans un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$, ζ est le cercle trigonométrique, $A(1;0)$, $B(0;1)$, $A'=S_O(A)$, $B'=S_O(B)$. On pose $\Gamma=\{M\in\zeta:(\vec{i},\overrightarrow{OM})\equiv\frac{\pi}{4}[\frac{\pi}{2}]\backslash\}$.

1) Vérifier que $B\notin\Gamma$.

2) Montrer que Γ contient exactement quatre points M_0, M_1, M_2, M_3 avec $(\vec{i},\overrightarrow{OM_{\backslash\{}0\backslash\}})\equiv\frac{\pi}{4}$, $M_1=S_{(BB')}(M_0)$, $M_2=S_O(M_0)$, $M_3=S_{(AA')}(M_0)$.

3) Montrer que $M_0M_1M_2M_3$ est un carré direct.

Auto-évaluation : vrai ou faux ?

Affirmation	Vrai	Faux
1. $\frac{13\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{6}$ sont deux mesures du même angle orienté.	☐	☐
2. La mesure principale de $\frac{5\pi}{4}$ est $\frac{\pi}{4}$.	☐	☐
3. $(\vec{u},\vec{v}) \equiv -(\vec{v},\vec{u})\,[2\pi]$.	☐	☐
4. $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) \equiv (\overrightarrow{BA},\overrightarrow{DC})\,[2\pi]$.	☐	☐