COURS • 3ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 4 — Angles orientés

◆ **Sommaire**

- 1. Unités de mesure, longueur d'un arc
- 2. Orientation du plan, cercle trigonométrique, arcs orientés
- 3. Angle orienté de deux vecteurs
- 4. Propriétés : relation de Chasles et conséquences
- 5. Angles inscrits et angle au centre
- 6. Points cocycliques — lieu des points M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \theta \ \ [2\pi]$
- 7. Bases orthonormées directes, déterminant, repérage polaire
- 8. Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir — Objectifs du programme officiel**

- Déterminer les mesures et la mesure principale d'un angle orienté.
- Utiliser la relation de Chasles pour démontrer alignement, parallélisme, orthogonalité.
- Utiliser le théorème de l'angle inscrit ; caractériser des points cocycliques.
- Passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires et inversement.

1 Unités de mesure, longueur d'un arc

◆ **Propriété — conversion**

Si a, b et c sont les mesures d'un même angle respectivement en radians, en degrés et en grades :
$\frac{a}{\pi} = \frac{b}{180} = \frac{c}{200}$.

◆ **Propriété — longueur d'un arc**

Sur un cercle de rayon r, l'arc géométrique intercepté par un angle au centre de mesure α radians a pour longueur $\ell = r\alpha$. Sur un cercle de rayon 1 : $\ell = \alpha$.

◆ **Exemple corrigé**

1) Convertir $\frac{5\pi}{6}$ rad en degrés, puis $135\,°$ en radians.

2) Calculer la longueur d'un arc de cercle de rayon 4 cm intercepté par un angle au centre de $\frac{\pi}{3}$ rad.

Solution.

1) $b=\frac{180\,a}{\pi}=\frac{180\times 5}{6}=150\,°$; $a=\frac{135\,\pi}{180}=\frac{3\,\pi}{4}$ rad.

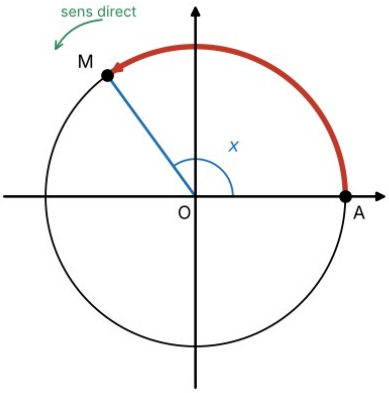
2) $\ell=4\times\frac{\pi}{3}=\frac{4\,\pi}{3}\approx 4{,}19$ cm.

2 Orientation du plan, cercle trigonométrique, arcs orientés

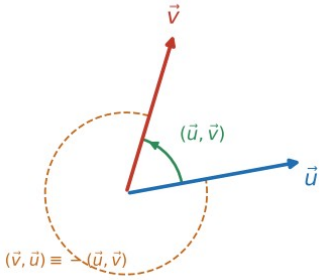
◆ **Définition**

- Sur un cercle, il y a deux sens de parcours. Le sens **direct** (ou positif) est le sens contraire de celui des aiguilles d'une montre ; l'autre est le sens **indirect** (négatif). Le plan est **orienté** lorsque ce choix est fait pour tous les cercles.
- Le **cercle trigonométrique** est un cercle de rayon 1 orienté dans le sens direct.
- Soit A et M deux points du cercle trigonométrique ζ. L'**arc orienté** d'origine A et d'extrémité M est l'arc parcouru de A vers M dans le sens direct.

cercle trigonométrique, arc orienté $\overset{\frown}{AM}$



angle orienté de deux vecteurs



◆ **Définition — mesures d'un arc orienté**

Si ℓ est la longueur de l'arc géométrique parcouru de A à B dans le sens direct, les **mesures** de l'arc orienté AB sont les réels $\ell+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; on écrit $\text{mes}(AB)\equiv\ell\ \ [2\pi]$.

- L'arc possède une unique mesure dans $[0\,;2\pi[$: la longueur ℓ.
- Sa **mesure principale** est l'unique mesure appartenant à $]-\pi\,;\pi]$.
- Pour tout point M de ζ et tout réel x, il existe un unique point N de ζ tel que $\text{mes}(MN)\equiv x\ \ [2\pi]$.

◆ Méthode — trouver la mesure principale

On retranche à x un multiple de 2π pour tomber dans $]-\pi\,;\pi]$: on cherche l'entier k tel que $-\pi<x-2k\pi\leq\pi$.

Exemple : $x=\dfrac{47\pi}{6}$. $\dfrac{47\pi}{6}=8\pi-\dfrac{\pi}{6}$, donc la mesure principale est $-\dfrac{\pi}{6}$.

◆ Propriété

- Chasles : $\text{mes}(AB)+\text{mes}(BC)\equiv\text{mes}(AC)\ \ [2\pi]$ et $\text{mes}(AB)\equiv-\text{mes}(BA)\ \ [2\pi]$.
- Toute translation conserve les mesures des arcs orientés ; toute symétrie axiale les change en leurs opposées.

3 Angle orienté de deux vecteurs

◆ Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Le couple $(\vec{u},\vec{v})$ est un **angle orienté**. Si A et B sont les points du cercle trigonométrique de centre O tels que $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ soient colinéaires et de même sens que $\vec{u}$ et $\vec{v}$, les mesures de $(\vec{u},\vec{v})$ sont celles de l'arc orienté AB.

On note $(\vec{u},\vec{v})\equiv\alpha\ \ [2\pi]$. L'unique mesure dans $]-\pi\,;\pi]$ est la **mesure principale**.

4 Propriétés : relation de Chasles et conséquences

◆ Théorème — relation de Chasles

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$: $(\vec{u},\vec{v})+(\vec{v},\vec{w})\equiv(\vec{u},\vec{w})\ \ [2\pi]$.

Conséquence	Formule (modulo 2π)
Angle opposé	$(\vec{v},\vec{u})\equiv-(\vec{u},\vec{v})$
Vecteur opposé	$(-\vec{u},\vec{v})\equiv(\vec{u},\vec{v})+\pi\ ;\ (\vec{u},-\vec{v})\equiv(\vec{u},\vec{v})+\pi$
Deux opposés	$(-\vec{u},-\vec{v})\equiv(\vec{u},\vec{v})$
Multiplication	$(a\vec{u},b\vec{v})\equiv(\vec{u},\vec{v})$ si $ab>0$; $\equiv(\vec{u},\vec{v})+\pi$ si $ab<0$
Égalité d'angles	$(\vec{u},\vec{v})\equiv(\vec{u'},\vec{v'})\Leftrightarrow(\vec{u},\vec{u'})\equiv(\vec{v},\vec{v'})$

◆ Propriété — caractérisations

- $(\vec{u},\vec{v})\equiv0\ \ [2\pi]\Leftrightarrow\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens.
- $(\vec{u},\vec{v})\equiv\pi\ \ [2\pi]\Leftrightarrow\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow(\vec{u},\vec{v})\equiv0\ \ [\pi]$; orthogonaux $\Leftrightarrow(\vec{u},\vec{v})\equiv\dfrac{\pi}{2}\ \ [\pi]$.
- Dans un triangle ABC : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})+(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})\equiv\pi\ \ [2\pi]$.

◆ **Démonstration — somme des angles d'un triangle**

Par Chasles : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})\equiv(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BA})\equiv\pi$. Or $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC})\equiv(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$ (on change les deux vecteurs en leurs opposés), d'où le résultat.

◆ **Exemple corrigé — alignement**

ABC est un triangle équilatéral direct ($(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\equiv\frac{\pi}{3}$) et ABD un triangle rectangle isocèle en B direct ($(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD})\equiv\frac{\pi}{2}$). Calculer $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$.

Solution. Dans ABD rectangle isocèle en B : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})\equiv-\frac{\pi}{4}$. Chasles :

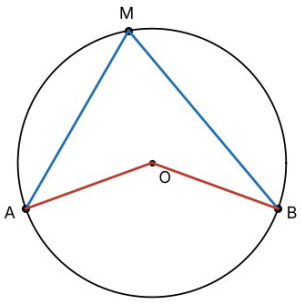
$(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})\equiv(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})\equiv-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\equiv-\frac{7\pi}{12}\ [2\pi]$.

5 Angles inscrits et angle au centre

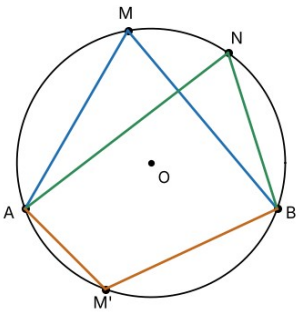
◆ **Définition**

- Un angle orienté de demi-droites $([Mx),[My))$ est **inscrit** dans un cercle ζ si $M\in\zeta$ et si les demi-droites $[Mx)$ et $[My)$ recoupent ζ, l'une pouvant être tangente à ζ en M.
- Si $[Mx)$ et $[My)$ recoupent ζ en A et B, l'angle orienté $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ est l'**angle au centre** associé. Si $[Mx)$ est tangente en M et $[My)$ recoupe ζ en B, l'angle au centre associé est $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OB})$.

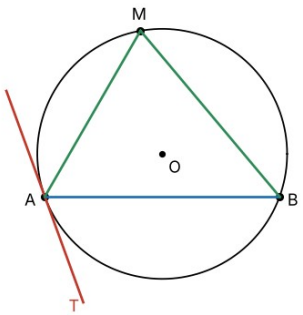
$2(\vec{MA},\vec{MB})\equiv(\vec{OA},\vec{OB})\ [2\pi]$



même arc : $(\vec{MA},\vec{MB})\equiv(\vec{NA},\vec{NB})$
arc opposé : $(\vec{M'A},\vec{M'B})\equiv(\vec{MA},\vec{MB})+\pi$



tangente : $(\vec{AT},\vec{AB})\equiv(\vec{MA},\vec{MB})\ [2\pi]$



◆ **Théorème — de l'angle inscrit**

- $2(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})\equiv(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})\ [2\pi]$; si (AT) est tangente en A : $2(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB})\equiv(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})\ [2\pi]$.
- Si M et N sont sur le même arc d'extrémités A et B : $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})\equiv(\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NB})\ [2\pi]$; s'ils sont sur des arcs opposés : $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})\equiv(\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NB})+\pi\ [2\pi]$.
- Dans tous les cas : $2(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})\equiv2(\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NB})\ [2\pi]$, et $(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB})\equiv(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})\ [2\pi]$ pour M sur l'arc convenable.

◆ **Démonstration**

Soit M' le point diamétralement opposé à M, de sorte que $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$.

- La symétrie d'axe la médiatrice de $[MA]$ échange M et A, fixe O et change les angles en leurs opposés : $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AM}) \equiv -(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MA}) \equiv (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO})$.
- Dans le triangle MAO : $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AM}) \equiv \pi$, d'où $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) \equiv \pi + 2(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MA})$.
- Chasles : $(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OA}) \equiv (\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) \equiv 2\pi + 2(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MA}) \equiv 2(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MA})$. De même $(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OB}) \equiv 2(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB})$.
- En soustrayant : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv 2(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB}) - 2(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MA}) \equiv 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ $[2\pi]$.

6 Points cocycliques — lieu des points

◆ **Théorème — points cocycliques**

Quatre points distincts A, B, C, D, trois à trois non alignés, sont cocycliques si et seulement si $2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv 2(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$ $[2\pi]$, c'est-à-dire $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$ $[\pi]$.

◆ **Théorème — lieu des points M**

Soit $A \neq B$, $\theta \not\equiv 0$ $[\pi]$ et T tel que $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) \equiv \theta$ $[2\pi]$.

1) Il existe un unique cercle ξ passant par A et B et tangent à (AT) en A.

2) L'ensemble Γ des points M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \theta$ $[2\pi]$ est l'un des deux arcs de ξ d'extrémités A et B, privé de A et B : l'arc orienté AB si la mesure principale de θ est dans $]-\pi\,;0[$, l'arc orienté BA si elle est dans $]0\,;\pi[$.

7 Bases orthonormées directes, déterminant, repérage polaire

◆ **Définition**

- Une base $(\vec{i}, \vec{j})$ est **orthonormée directe** si $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ et $(\vec{i}, \vec{j}) \equiv \dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$; **indirecte** si $(\vec{i}, \vec{j}) \equiv -\dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.
- Pour $\vec{u} \neq \vec{0}$, soit $\vec{u'}$ de même norme que $\vec{u}$ avec $(\vec{u}, \vec{u'}) \equiv \dfrac{\pi}{2}$. Le **déterminant** de $(\vec{u}, \vec{v})$ est $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u'} \cdot \vec{v}$ (et 0 si l'un des vecteurs est nul).

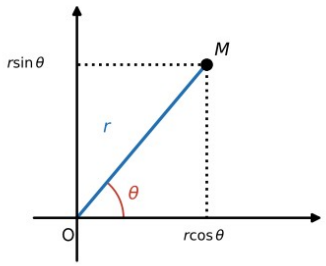
◆ **Théorème**

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$ et $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v})$.
- Dans une base orthonormée directe, si $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$: $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

◆ Définition — coordonnées polaires

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$. Pour $M\neq O$, un couple $[r,\theta]$ avec $r=OM$ et $\theta\equiv(\vec{i},\overrightarrow{OM})\ [2\pi]$ est un **couple de coordonnées polaires** de M.

Passage aux coordonnées cartésiennes : $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$; inversement $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\theta=\dfrac{x}{r}$ et $\sin\theta=\dfrac{y}{r}$.



◆ Exemple corrigé

1) Déterminer les coordonnées cartésiennes du point A de coordonnées polaires $[2,-\dfrac{\pi}{3}]$.

2) Déterminer un couple de coordonnées polaires de $B(-\sqrt{3};1)$.

Solution.

1) $x=2\cos(-\dfrac{\pi}{3})=1$, $y=2\sin(-\dfrac{\pi}{3})=-\sqrt{3}$: $A(1;-\sqrt{3})$.

2) $r=\sqrt{3+1}=2$, $\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$: $\theta=\dfrac{5\pi}{6}$. Donc $B[2,\dfrac{5\pi}{6}]$.

★ Fiche mémo

Notion	À retenir
Conversion	$\dfrac{a}{\pi}=\dfrac{b}{180}=\dfrac{c}{200}$; arc : $\ell=r\alpha$
Mesure principale	unique mesure dans $]-\pi;\pi]$
Chasles	$(\vec{u},\vec{v})+(\vec{v},\vec{w})\equiv(\vec{u},\vec{w})\ [2\pi]$
Opposés	$(\vec{v},\vec{u})\equiv-(\vec{u},\vec{v})$; $(-\vec{u},\vec{v})\equiv(\vec{u},\vec{v})+\pi$
Colinéaires / orthogonaux	$(\vec{u},\vec{v})\equiv 0\ [\pi]$ / $\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$
Angle inscrit	$2(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})\equiv(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})\ [2\pi]$
Cocycliques	$(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})\equiv(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB})\ [\pi]$
Polaires	$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$