EXERCICES • 3ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 3 — Continuité

1 Continuité

Exercice 1

Justifier la continuité de f au point a :

1) $f(x)=2x+|x-2|$, $a=2$;

2) $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$, $a=0$;

3) $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$, $a=-1$.

Exercice 2

Soit $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ si $x\neq 1$ et $f(1)=m$. Déterminer m pour que f soit continue en 1.

2 Valeurs intermédiaires

Exercice 3

Soit $f(x)=x^3+x-1$ sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $]0;1[$.

2) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

3) Vérifier que α est aussi solution de $x^2=\dfrac{2x-1}{1-x^4}$.

Exercice 4

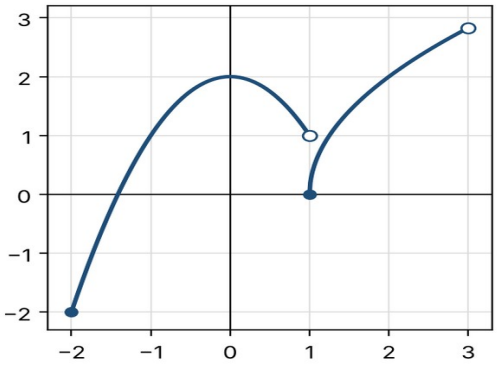
Soit $f(x)=(x+1)^2\sqrt{x-2}$.

1) Déterminer le domaine D de f, étudier sa continuité et son sens de variation.

2) Montrer que $f(x)=4$ admet une unique solution α sur $]2;+\infty[$; en donner un encadrement d'amplitude 10^{-1}.

Exercice 5

La courbe ci-dessous représente une fonction f (un point creux signifie que le point n'appartient pas à la courbe).



1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Déterminer $f(1)$. f est-elle continue à droite en 1 ? à gauche en 1 ? en 1 ?

3) Déterminer $f([-2;0])$, $f([-2;1])$ et $f([-2;3[)$.

Exercice 6

Soit $f(x)=x^2-2x$. Déterminer $f([1;3])$, $f([-1;1])$ et $f([0;3])$.

Exercice 7

Soit $f(x)=x^2+ax$ si $x\leq 1$ et $f(x)=\dfrac{2x+b}{x}$ si $x>1$.

1) Déterminer une relation entre a et b pour que f soit continue en 1.

2) On prend $a=2$. Déterminer b, puis étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8

Soient sur $]0;+\infty[$: $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=1+\dfrac{1}{x}$ et $h(x)=f(x)-g(x)$.

1) Étudier le sens de variation de f, g, puis de h. Justifier la continuité de h.

2) Déterminer $h([1;4])$.

3) Montrer que $h(x)=0$ admet une unique solution α dans $[2;3]$; donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près par défaut.

4) Vérifier que α est solution de $x^3-x^2-2x-1=0$.

Exercice 9

Soit f continue sur $[0;1]$ avec $f(0)=f(1)$. Montrer qu'il existe $c\in[0;\dfrac{1}{2}]$ tel que $f(c+\dfrac{1}{2})=f(c)$.

Auto-évaluation : vrai ou faux ?

Affirmation	Vrai	Faux
1. Une fonction continue sur $[a;b]$ s'annule toujours sur $[a;b]$.	☐	☐
2. $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.	☐	☐
3. Si f est continue et $f(0)f(1)<0$, f s'annule sur $]0;1[$.	☐	☐
4. L'image de $[0;2]$ par $x\mapsto x^2$ est $[0;4]$.	☐	☐