COURS • 3ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 3 — Continuité

◆ **Sommaire**

- 1. Continuité en un réel
- 2. Continuité à droite, à gauche
- 3. Fonctions continues usuelles et opérations
- 4. Continuité sur un intervalle
- 5. Image d'un intervalle — théorème des valeurs intermédiaires
- 6. Résolution approchée : la dichotomie
- 7. Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir — Objectifs du programme officiel**

- Reconnaître et justifier la continuité d'une fonction en un réel et sur un intervalle.
- Étudier la continuité d'une fonction définie par morceaux en un point de raccordement.
- Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour l'existence (et l'unicité) d'une solution.
- Encadrer une solution par dichotomie ; déterminer l'image d'un intervalle.

1 Continuité en un réel

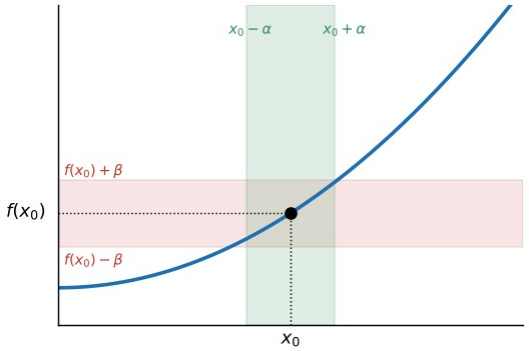
Dans tout le chapitre, f est définie sur un intervalle ouvert I et x_0 est un réel de I.

◆ **Définition**

f est **continue en** x_0 si pour tout réel $\beta>0$, il existe un réel $\alpha>0$ tel que pour tout $x\in I$:

$|x-x_0|<\alpha \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\beta.$

Autrement dit, $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de $f(x_0)$ dès que x est suffisamment proche de x_0.



◆ **Exemple corrigé — continuité d'une fonction affine**

Montrer, à l'aide de la définition, que $f(x)=3x-2$ est continue en tout réel x_0.

Solution. $|f(x)-f(x_0)|=3|x-x_0|$. Soit $\beta>0$; on choisit $\alpha=\frac{\beta}{3}$. Si $|x-x_0|<\alpha$ alors $|f(x)-f(x_0)|<3\alpha=\beta$.

◆ **Exemple corrigé — la racine carrée**

Montrer que $x\mapsto\sqrt{x}$ est continue en $x_0>0$.

Solution. $|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|=\frac{|x-x_0|}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\leq\frac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}}$. Il suffit de prendre $\alpha=\beta\sqrt{x_0}$.

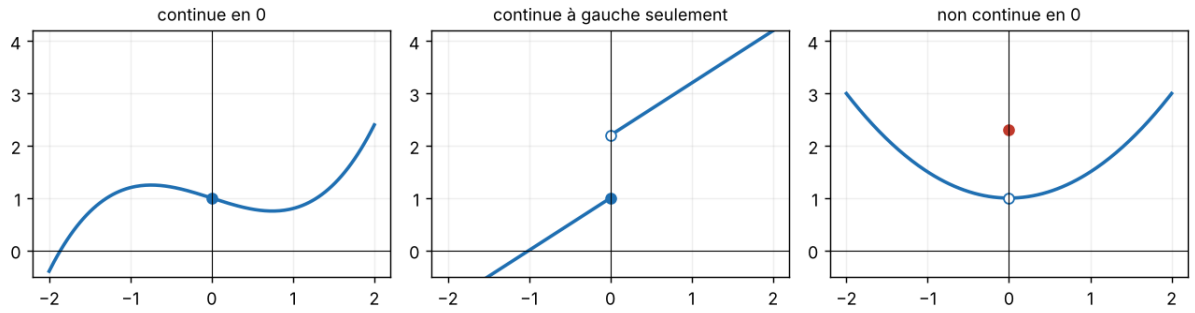
2 Continuité à droite, à gauche

◆ **Définition**

- f est **continue à droite** en x_0 si pour tout $\beta>0$ il existe $\alpha>0$ tel que : $x\in I$ et $0\leq x-x_0<\alpha \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\beta$.
- f est **continue à gauche** en x_0 si pour tout $\beta>0$ il existe $\alpha>0$ tel que : $x\in I$ et $0\leq x_0-x<\alpha \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\beta$.

◆ **Théorème**

f est continue en x_0 si et seulement si f est continue à droite et à gauche en x_0.



◆ **Méthode — fonction définie par morceaux**

Pour étudier la continuité en un point de raccordement x_0 :

- on calcule $f(x_0)$ avec l'expression valable en x_0 ;
- on étudie la continuité à gauche avec l'expression valable pour $x<x_0$, puis à droite avec celle valable pour $x>x_0$;
- f est continue en x_0 si les deux études aboutissent à la même valeur $f(x_0)$.

◆ **Exemple corrigé — déterminer un paramètre**

$f(x)=x^2+1$ si $x\leq 1$ et $f(x)=mx-3$ si $x>1$.

1) Montrer que f est continue à gauche en 1.

2) Déterminer m pour que f soit continue en 1.

Solution.

1) Sur $]-\infty;1]$, f coïncide avec le polynôme $x\mapsto x^2+1$, continu en 1 : f est continue à gauche en 1 et $f(1)=2$.

2) À droite, $f(x)$ se rapproche de $m-3$ lorsque x tend vers 1. f est continue en 1 si et seulement si $m-3=2$, soit $m=5$.

3 Fonctions continues usuelles et opérations

◆ **Propriété — fonctions de référence**

- Toute fonction constante, toute fonction affine, toute fonction polynôme est continue en tout réel.
- Toute fonction rationnelle est continue en tout réel de son ensemble de définition.
- $x\mapsto\sqrt{x}$ est continue en tout réel $x_0\geq 0$ (à droite en 0) ; $x\mapsto|x|$, $\sin$ et $\cos$ sont continues en tout réel.

◆ **Théorème — opérations**

Si f et g sont continues en x_0 et k est un réel :

- $f+g$, fg et kf sont continues en x_0 ;
- si $g(x_0)\neq 0$, $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues en x_0 ;
- $|f|$ est continue en x_0 ;
- si f est positive sur I, $\sqrt{f}$ est continue en x_0 ;
- si u est continue en x_0 et v continue en $u(x_0)$, alors $v\circ u$ est continue en x_0.

Les mêmes résultats valent pour la continuité à droite et à gauche.

◆ **Démonstration — cas de la valeur absolue**

Pour tous réels u, v : $||u|-|v||\leq|u-v|$. Donc $||f(x)|-|f(x_0)||\leq|f(x)-f(x_0)|$, et le même α convient pour $|f|$.

◆ **Exemple corrigé**

Justifier la continuité sur IR de $g(x)=\sqrt{x^2+x+1}+|x-2|$.

Solution. $x^2+x+1=(x+\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{3}{4}>0$; le polynôme est continu et positif, donc sa racine carrée est continue sur IR. $x\mapsto|x-2|$ est continue comme valeur absolue d'une fonction affine. La somme est continue sur IR.

4 Continuité sur un intervalle

Intervalle	f est continue sur l'intervalle si elle est...
$]a\,;b[$	continue en tout réel de $]a\,;b[$
$[a\,;b[$	continue sur $]a\,;b[$ et continue à droite en a
$]a\,;b]$	continue sur $]a\,;b[$ et continue à gauche en b
$[a\,;b]$	continue sur $]a\,;b[$, à droite en a et à gauche en b

◆ **Propriété**

- Toute fonction polynôme est continue sur IR.
- Toute fonction rationnelle est continue sur chacun des intervalles de son ensemble de définition.

5 Image d'un intervalle — théorème des valeurs intermédiaires

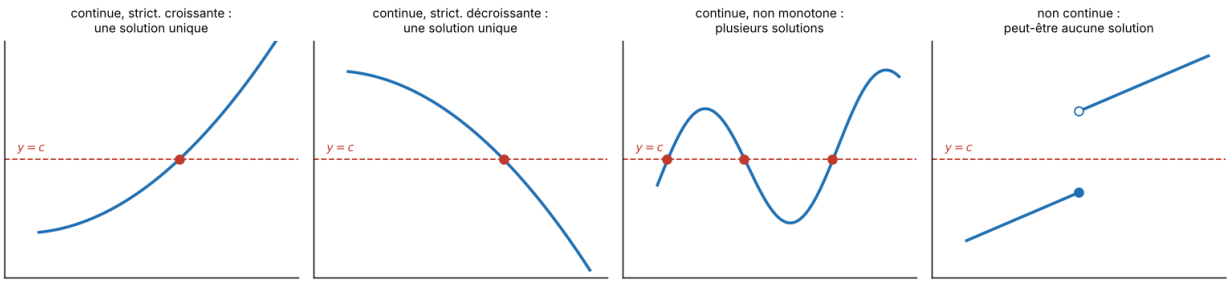
◆ **Théorème — image d'un intervalle**

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

En particulier, si f est continue et strictement croissante sur $[a\,;b]$: $f([a\,;b])=[f(a)\,;f(b)]$; si elle est strictement décroissante : $f([a\,;b])=[f(b)\,;f(a)]$.

◆ **Théorème — des valeurs intermédiaires (TVI)**

Si f est continue sur $[a\,;b]$, alors pour tout réel c compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=c$ admet **au moins** une solution dans $[a\,;b]$.



◆ **Propriété — corollaires**

- **Corollaire 1.** Si f est continue sur $[a\,;b]$ et $f(a)\times f(b)<0$, il existe au moins un réel $x_0\in]a\,;b[$ tel que $f(x_0)=0$. Si de plus f est strictement monotone sur $[a\,;b]$, ce réel est **unique**.
- **Corollaire 2.** Si f est continue sur un intervalle I et ne s'y annule pas, alors f garde un signe constant sur I.

◆ **Démonstration — unicité dans le corollaire 1**

Si f est strictement croissante et $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) < f(x_2)$: f ne peut pas s'annuler en deux réels distincts. Même argument si f est strictement décroissante.

◆ **Attention**

Le TVI garantit l'**existence** d'une solution, il ne la calcule pas. Sans continuité, la conclusion peut être fausse (dernière figure).

◆ **Exemple corrigé — existence et unicité**

$f(x) = x^3 + x - 1$.

1) Étudier le sens de variation de f sur IR.

2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0\,;1[$.

Solution.

1) $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x - 1$ sont strictement croissantes : leur somme f est strictement croissante sur IR.

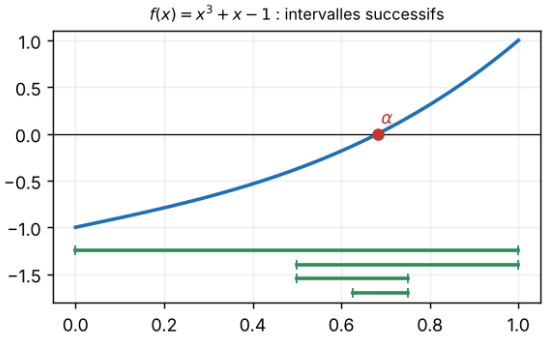
2) f est continue (polynôme), strictement croissante, $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$: d'après le corollaire 1, il existe un unique $\alpha \in]0\,;1[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

6 Résolution approchée : la dichotomie

◆ **Méthode — algorithme de dichotomie**

On sait que f est continue, strictement monotone et que $f(a) \times f(b) < 0$.

- On calcule $f(m)$ avec $m = \dfrac{a+b}{2}$.
- Si $f(a) \times f(m) < 0$, la solution est dans $]a\,;m[$; sinon elle est dans $[m\,;b[$.
- On recommence : à chaque étape, l'amplitude est divisée par 2. Après n étapes, elle vaut $\dfrac{b-a}{2^n}$.



Étape	a	b	m	signe de $f(m)$
1	0	1	0,5	–
2	0,5	1	0,75	+
3	0,5	0,75	0,625	–
4	0,625	0,75	0,6875	+

Conclusion : $0{,}625<\alpha<0{,}6875$, encadrement d'amplitude $0{,}0625$. En calculant $f(0{,}6)<0$ et $f(0{,}7)>0$, on obtient directement $0{,}6<\alpha<0{,}7$ (amplitude 10^{-1}).

★ Fiche mémo

Notion	À retenir
Définition	$\forall \beta>0, \exists \alpha>0 : \lvert x-x_0\rvert<\alpha \Rightarrow \lvert f(x)-f(x_0)\rvert<\beta$
Droite / gauche	continue en x_0 $\Leftrightarrow$ continue à droite et à gauche
Usuelles	polynômes, rationnelles (sur leur domaine), $\sqrt{x}$, $\lvert x\rvert$, $\sin$, $\cos$
Opérations	somme, produit, quotient (dénominateur ≠ 0), $\lvert f\rvert$, $\sqrt{f}$ ($f\geq 0$), composée
Image	image d'un intervalle par une fonction continue : un intervalle
TVI	continue + $f(a)f(b)<0$ ⇒ au moins une racine ; + strictement monotone ⇒ unique
Signe	continue et ne s'annule pas sur I ⇒ signe constant