EXERCICES • 3ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

# Chapitre 20 — Suites réelles

## 1 Suites récurrentes

### Exercice 1

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0=1$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{2}+1$.

**1)** Calculer $u_1$ et $u_2$, puis montrer que $(u_n)$ n'est ni arithmétique ni géométrique.

**2)** Montrer par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $1\leq u_n\leq 2$.

**3)** Montrer que la suite $(u_n)$ est croissante.

**4)** Soit $a$ un réel et $(v_n)$ la suite définie par $v_n=u_n-a$.

**a)** Déterminer $a$ pour que $(v_n)$ soit une suite géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.

**b)** Exprimer $v_n$, puis $u_n$, en fonction de $n$.

**c)** Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

**5)** On pose $s_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$. Exprimer $s_n$ en fonction de $n$.

### Exercice 2

Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ les suites définies par $u_0=3$, $v_0=4$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$ : $u_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}+v_n}{2}$.

**1)** Calculer $u_1$, $v_1$, $u_2$ et $v_2$.

**2)** On pose $w_n=v_n-u_n$. Montrer que $(w_n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

**3)** Étudier le sens de variation de chacune des suites $(u_n)$ et $(v_n)$.

**4)** Montrer que $(u_n)$ est majorée par $4$ et que $(v_n)$ est minorée par $3$.

**5)** On pose $t_n=\dfrac{u_n+2v_n}{3}$. Montrer que la suite $(t_n)$ est constante.

**6)** Exprimer $u_n$ et $v_n$ en fonction de $n$.

**7)** En déduire les limites des suites $(u_n)$ et $(v_n)$.

### Exercice 3

On considère la suite $(u_n)$ définie par la donnée de $u_0$ et la relation $u_{n+1}=\dfrac{u_n+a}{u_n+1}$, où $a$ est un réel.

**Partie I.** Dans cette partie, $u_0=1$ et $a=0$.

**1)** Montrer par récurrence que $u_n>0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

**2)** On pose $w_n=\dfrac{1}{u_n}$.

**a)** Montrer que $(w_n)$ est une suite arithmétique.

**b)** En déduire $u_n$ en fonction de $n$.

**Partie II.** Dans cette partie, $u_0=0$ et $a=\frac{1}{4}$.

**1)** Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leq u_n<\frac{1}{2}$.

**2)** Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)$.

**3)** On pose $v_n=\frac{2u_n+1}{2u_n-1}$.

**a)** Montrer que $(v_n)$ est une suite géométrique.

**b)** Exprimer $u_n$ en fonction de $n$.

**c)** Déterminer la limite de $(u_n)$.

## Exercice 4

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0=1+\sqrt{2}$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=1+\sqrt{u_n^2-2u_n+4}$.

**1)** Vérifier que $(u_n)$ est bien définie et montrer que $u_n\geq 1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

**2)** On pose $v_n=(u_n-1)^2$.

**a)** Montrer que $(v_n)$ est une suite arithmétique.

**b)** Exprimer $v_n$, puis $u_n$, en fonction de $n$.

## Exercice 5

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0=1$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\frac{u_n+8}{2u_n+1}$.

**1)** Calculer $u_1$ et $u_2$.

**2)** Soit $h$ la fonction définie sur $[0;5]$ par $h(x)=\frac{x+8}{2x+1}$, et $(H)$ sa courbe dans un repère orthonormé.

**a)** Étudier les variations de $h$.

**b)** Résoudre dans $[0;5]$ l'équation $h(x)=x$.

**c)** Tracer $(H)$ et la droite $\Delta: y=x$.

**3) a)** Construire sur l'axe des abscisses les termes $u_0$, $u_1$, $u_2$ et $u_3$.

**b)** Émettre des conjectures sur la monotonie et la convergence de $(u_n)$.

**c)** Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $1\leq u_n\leq 4$.

**4)** On pose $v_n=\frac{u_n-2}{u_n+2}$.

**a)** Calculer $v_0$ et $v_1$.

**b)** Montrer que $(v_n)$ est une suite géométrique.

**c)** Exprimer $u_n$ en fonction de $n$.

**d)** Déterminer la limite de $(u_n)$.

## Exercice 6

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0=0$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\sqrt{4+3u_n}$.

**1)** Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leq u_n\leq 4$.

**2)** Étudier le sens de variation de $(u_n)$.

**3)** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1}-4| \leq \frac{3}{4}|u_n-4|$.

**4)** En déduire que $4-4\left(\frac{3}{4}\right)^n \leq u_n \leq 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis déterminer la limite de $(u_n)$.

**5)** On pose $s_n = u_0+u_1+\ldots+u_n$. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $4+\frac{12}{n}\left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{12}{n} \leq \frac{s_n}{n} \leq 4+\frac{4}{n}$, puis calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{s_n}{n}$.

## 2 Suites auxiliaires

### Exercice 7

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $u_1 = -1$ et, pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)}u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}$.

**1)** Montrer par récurrence que la suite $(u_n)$ est majorée par $3$.

**2)** Étudier le sens de variation de $(u_n)$.

**3)** On pose $v_n = n(3-u_n)$ pour $n \geq 1$.

**a)** Montrer que $(v_n)$ est une suite géométrique.

**b)** Exprimer $v_n$, puis $u_n$, en fonction de $n$.

**c)** Déterminer les limites des suites $(v_n)$ et $(u_n)$.

### Exercice 8

Soit $k$ un réel strictement positif et $f_k$ la fonction définie sur $I\!R^*$ par $f_k(x) = 1+\frac{k}{x}$.

**1)** Montrer que l'équation $f_k(x) = x$ admet deux solutions $\alpha$ et $\beta$ telles que $\alpha < 0 < \beta$.

**2)** Soit $x_0 > 0$ et $(x_n)$ la suite définie par $x_{n+1} = 1+\frac{k}{x_n}$.

**a)** Montrer que $x_n$ est défini et strictement positif pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**b)** Justifier que la suite $(u_n)$ définie par $u_n = \frac{x_n-\beta}{x_n-\alpha}$ est bien définie.

**c)** Montrer que $(u_n)$ est une suite géométrique ; exprimer $u_n$, puis $x_n$, en fonction de $n$.

**d)** Déterminer la limite de $(x_n)$. En déduire la valeur des nombres $A = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}$ et $B = 1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+\ldots}}$.

### Exercice 9

On considère la suite $(u_n)$ définie par la donnée de $u_0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1-u_n}{2}}$.

**1) a)** Montrer que si $u_0 \in [-1;1]$, alors $u_n \in [-1;1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**b)** Déterminer $u_0$ pour que la suite $(u_n)$ soit constante.

**2)** On suppose que $u_0 = \sin\alpha_0$ avec $\alpha_0 \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.

**a)** Étudier le cas $\alpha_0=\frac{\pi}{6}$.

**b)** Montrer que, pour tout $\alpha\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, $\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{2}}=\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})$. En écrivant $u_n=\sin\alpha_n$, exprimer $\alpha_{n+1}$ en fonction de $\alpha_n$.

**c)** Montrer que la suite $(\beta_n)$ définie par $\beta_n=\alpha_n-\frac{\pi}{6}$ est géométrique. En déduire $\alpha_n$, puis $u_n$, en fonction de $n$, et la limite de $(u_n)$.

## Exercice 10

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $u_1=\frac{3}{2}$ et, pour tout $n\geq 1$, $u_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n+\frac{2}{u_n})$.

**1)** Montrer que $u_n>0$ pour tout $n\geq 1$.

**2)** Résoudre dans $]0;+\infty[$ l'équation $x=\frac{1}{2}(x+\frac{2}{x})$.

**3)** Montrer que $u_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{(u_n-\sqrt{2})^2}{2u_n}$, puis en déduire que $u_n>\sqrt{2}$ pour tout $n\geq 1$.

**4)** Montrer que $u_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{1}{2}(u_n-\sqrt{2})+\frac{1}{u_n}-\frac{1}{\sqrt{2}}$, puis en déduire que $u_n-\sqrt{2}\leq\frac{1}{2^n}$.

**5)** Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

## Exercice 11

On définit une suite de polynômes par $U_0(x)=2$, $U_1(x)=x+\frac{1}{2}$ et, pour tout $n\geq 2$,

$U_n(x)=(x+\frac{1}{2})U_{n-1}(x)-\frac{1}{16}U_{n-2}(x)$.

**1)** Calculer $U_2(x)$, $U_3(x)$ et $U_4(x)$.

**2)** Déterminer le degré et le terme de plus haut degré de $U_n(x)$.

**3)** Montrer par récurrence que, pour tout réel $a$, $U_n(-\cos^2 a)=\frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}\cos(2na)$.

**4)** En déduire l'expression de $\cos 6a$ et de $\cos 8a$ en fonction de $\cos a$.

## Exercice 12

Soit $(r_n)$ la suite définie par $r_0=1$, $r_1=2$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $r_{n+2}=\frac{4n+7}{2n+3}r_{n+1}-\frac{2n+2}{2n+1}r_n$.

**1)** On pose $a_n=r_{n+1}-\frac{2n+2}{2n+1}r_n$. Montrer que la suite $(a_n)$ est constante.

**2)** En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $r_n=\frac{4^n}{C_{2n}^{\ n}}$.

## Auto-évaluation : vrai ou faux ?

| Affirmation | Vrai | Faux |
|---|---|---|
| 1. Une suite croissante et majorée est bornée. | ☐ | ☐ |
| 2. Si $u_n = f(n)$ et $(u_n)$ croissante, alors $f$ est croissante. | ☐ | ☐ |
| 3. $\left(-\frac{1}{2}\right)^n \to 0$. | ☐ | ☐ |
| 4. Une suite bornée est convergente. | ☐ | ☐ |