COURS • 3ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 20 — Suites réelles

◆ **Sommaire**

- 1. Généralités : modes de définition d'une suite
- 2. Sens de variation
- 3. Suites majorées, minorées, bornées
- 4. Suites arithmétiques et géométriques
- 5. Suites convergentes, suites divergentes
- 6. Opérations sur les limites — théorèmes de comparaison
- 7. Suites monotones — suites récurrentes $u_{n+1}=f(u_n)$
- 8. Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir — Objectifs du programme officiel**

- Étudier la monotonie d'une suite ; montrer qu'une suite est majorée, minorée ou bornée.
- Utiliser les suites arithmétiques et géométriques.
- Déterminer la limite d'une suite à l'aide des opérations, des théorèmes de comparaison, de la limite d'une fonction.
- Étudier une suite récurrente $u_{n+1}=f(u_n)$ (raisonnement par récurrence, monotonie, convergence).

1 Généralités : modes de définition d'une suite

◆ **Définition**

Une **suite réelle** $(u_n)_{n\geq n_0}$ associe à tout entier $n\geq n_0$ un réel u_n, appelé terme d'indice n. Une suite peut être définie :

- de façon **explicite** : $u_n=f(n)$ (par exemple $u_n=\dfrac{2n+1}{n+3}$) ;
- par **récurrence** : la donnée de u_0 et d'une relation $u_{n+1}=f(u_n)$ (par exemple $u_0=0$, $u_{n+1}=\sqrt{u_n+2}$).

2 Sens de variation

◆ **Définition**

- (u_n) est **croissante** si $u_{n+1}\geq u_n$ pour tout $n\geq n_0$; **décroissante** si $u_{n+1}\leq u_n$.
- Elle est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

◆ Méthode — étudier la monotonie

1) Étudier le signe de $u_{n+1}-u_n$.

2) Pour une suite à termes strictement positifs, comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1.

3) Si $u_n=f(n)$ avec f monotone sur $[n_0;+\infty[$, la suite a le même sens de variation que f (la réciproque est fausse).

4) Pour une suite récurrente, raisonner par récurrence.

◆ Exemple corrigé

Étudier la monotonie de $u_n=\frac{2n+1}{n+3}$.

Solution. $u_n=f(n)$ avec $f(x)=2-\frac{5}{x+3}$, croissante sur $[0;+\infty[$: (u_n) est croissante.

3 Suites majorées, minorées, bornées

◆ Définition

- (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que $u_n\le M$ pour tout $n\ge n_0$; **minorée** s'il existe m tel que $u_n\ge m$.
- (u_n) est **bornée** si elle est majorée et minorée.

◆ Exemple corrigé

Pour $u_n=\frac{2n+1}{n+3}$: $u_n=2-\frac{5}{n+3}<2$ et la suite est croissante, donc $u_n\ge u_0=\frac{1}{3}$: (u_n) est bornée.

4 Suites arithmétiques et géométriques

	Arithmétique de raison r	Géométrique de raison q
Définition	$u_{n+1}=u_n+r$	$u_{n+1}=q\,u_n$
Terme général	$u_n=u_p+(n-p)r$	$u_n=u_p q^{n-p}$
Somme $u_p+\ldots+u_n$ ($N=n-p+1$ termes)	$\frac{N(u_p+u_n)}{2}$	$u_p\times\frac{1-q^N}{1-q}$ $(q\ne1)$

◆ Théorème — limite de q^n

- Si $q>1$: $\lim_{n\to+\infty}q^n=+\infty$.
- Si $q=1$: $q^n=1$; si $-1<q<1$: $\lim_{n\to+\infty}q^n=0$.
- Si $q\le-1$: la suite (q^n) n'a pas de limite.

◆ **Démonstration — cas $q>1$**

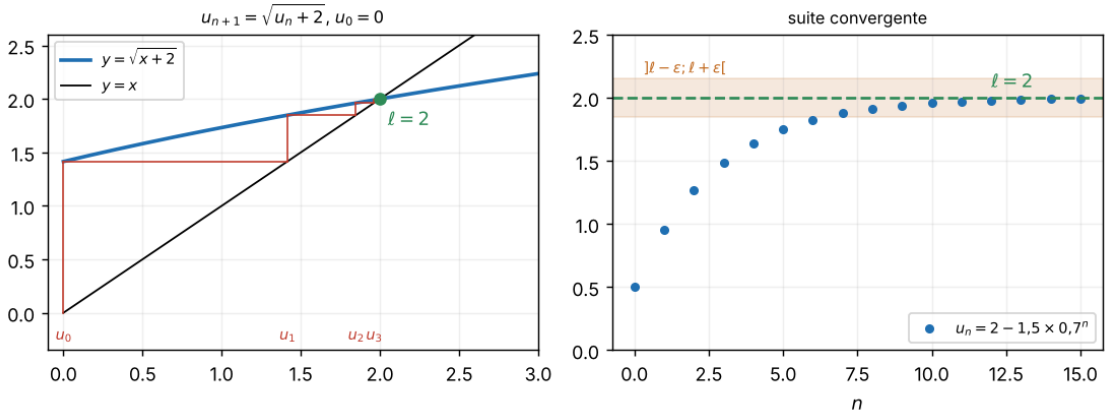
On pose $q=1+a$ avec $a>0$. Par récurrence (inégalité de Bernoulli) : $(1+a)^n \geq 1+na$, qui tend vers $+\infty$.

Pour $0<|q|<1$, on applique ce résultat à $\dfrac{1}{|q|}>1$.

5 Suites convergentes, suites divergentes

◆ **Définition**

- (u_n) **converge** vers le réel ℓ si pour tout $\varepsilon>0$, il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$: $|u_n-\ell|<\varepsilon$. On note $\lim_{n\to+\infty} u_n=\ell$; cette limite est unique.
- Une suite qui ne converge pas est **divergente**.
- $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ si pour tout $A>0$ il existe N tel que $n \geq N \Rightarrow u_n>A$ (définition analogue pour $-\infty$).



◆ **Théorème — suite définie par $u_n=f(n)$**

Si f est définie sur $[a;+\infty[$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ (ℓ réel ou infini), alors $\lim_{n\to+\infty} u_n=\ell$.

◆ **Propriété**

Si $\lim_{n\to+\infty} u_n=\ell\neq0$, alors $u_n\neq0$ à partir d'un certain rang.

6 Opérations sur les limites — théorèmes de comparaison

◆ **Propriété — opérations**

- Si $u_n \to \ell$ et $v_n \to \ell'$: $a u_n + b v_n \to a\ell + b\ell'$ et $u_n v_n \to \ell\ell'$; si $\ell \neq 0$, $\frac{1}{u_n} \to \frac{1}{\ell}$.
- Pour une suite à termes strictement positifs : $u_n \to +\infty \iff \frac{1}{u_n} \to 0$.
- Les formes indéterminées sont les mêmes que pour les fonctions.

◆ **Théorème — comparaison (à partir d'un certain rang)**

- Si $|u_n - \ell| \leq v_n$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
- Si $u_n \geq w_n$ et $\lim_{n\to+\infty} w_n = +\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$; si $u_n \leq v_n$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
- **Gendarmes** : si $v_n \leq u_n \leq w_n$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = \ell$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

◆ **Exemple corrigé**

$\left|\frac{(-1)^n}{n+1}\right| \leq \frac{1}{n+1}$, qui tend vers 0 : la suite $\left(\frac{(-1)^n}{n+1}\right)$ converge vers 0.

7 Suites monotones — suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

◆ **Théorème**

- Toute suite **croissante et majorée** converge ; toute suite **décroissante et minorée** converge.
- Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

◆ **Théorème — limite d'une suite récurrente**

Si $u_{n+1} = f(u_n)$, si (u_n) converge vers ℓ et si f est continue en ℓ, alors $f(\ell) = \ell$.

◆ **Exemple corrigé — étude complète**

$u_0=0$ et $u_{n+1}=\sqrt{u_n+2}$.

1) Montrer par récurrence que $0\le u_n<2$ pour tout n.

2) Montrer que (u_n) est croissante.

3) En déduire qu'elle converge et déterminer sa limite.

Solution.

1) $u_0=0$. Si $0\le u_n<2$, alors $2\le u_n+2<4$, donc $\sqrt{2}\le u_{n+1}<2$.

2) $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n+2-u_n^{\,2}}{\sqrt{u_n+2}+u_n}=\dfrac{(2-u_n)(1+u_n)}{\sqrt{u_n+2}+u_n}>0$.

3) Croissante et majorée par 2, elle converge vers $\ell\in[0\,;2]$; $x\mapsto\sqrt{x+2}$ est continue, donc $\ell=\sqrt{\ell+2}$, soit $\ell^2-\ell-2=0$ avec $\ell\ge0$: $\ell=2$.

★ Fiche mémo

Notion	À retenir
Monotonie	signe de $u_{n+1}-u_n$; ou $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1 si $u_n>0$
Arithmétique	$u_n=u_0+nr$
Géométrique	$u_n=u_0q^n$; $q^n\to0$ si $\lvert q\rvert<1$, $+\infty$ si $q>1$
$u_n=f(n)$	même limite que f en $+\infty$
Comparaison	$\lvert u_n-\ell\rvert\le v_n\to0\Rightarrow u_n\to\ell$; gendarmes
Monotone	croissante majorée ⇒ convergente
Récurrente	limite ℓ vérifie $f(\ell)=\ell$ (f continue)