EXERCICES • 3ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

# Chapitre 2 — Généralités sur les fonctions

## 1 Variations, majorants, minorants

### Exercice 0

$I=[-1;+\infty[$, $f(x)=\sqrt{1+x}$ et $g(x)=1+\frac{x}{2}$. Montrer que pour tout $x\in I$ : $f(x)\leq g(x)$.

### Exercice 1

Soit $f(x)=\frac{-4x^2+8x-2}{1-2x}$ sur $]\frac{1}{2};+\infty[$.

**1)** Déterminer $a$, $b$, $c$ tels que $f(x)=ax+b+\frac{c}{1-2x}$.

**2)** Étudier les variations de $g(x)=\frac{1}{1-2x}$ et $h(x)=2x-3$ sur $]\frac{1}{2};+\infty[$.

**3)** En déduire les variations de $f$.

### Exercice 2

Soit $f(x)=\frac{2x+3}{x+5}$ sur $[-3;+\infty[$.

**1)** Démontrer que $f(x)=2-\frac{7}{x+5}$.

**2)** Démontrer que $f$ est croissante.

**3) a)** Démontrer que $f$ admet un minimum et le préciser.

**b)** Démontrer que $f$ admet un majorant.

**c)** En déduire que $f$ est bornée et encadrer $f(x)$.

### Exercice 3

Avec $u(x)=x^2$ et $v(x)=\frac{1}{x}$, décomposer les fonctions suivantes et en déduire leurs variations :

**a)** $f(x)=(4-2x)^2$ sur $[2;+\infty[$ ;

**b)** $g(x)=\frac{2}{x}-1$ sur $]0;+\infty[$.

### Exercice 4

Étudier les variations de $f$ sur $I$ :

**1)** $f(x)=x^2-2x+1$, $I=]1;+\infty[$ ;

**2)** $f(x)=x^3-x^2+1$, $I=[0;\frac{2}{3}]$.

### Exercice 5

Soit $f(x)=x(1-x)$ sur $\mathbb{R}$.

**1)** Montrer que $f(x)\leq\frac{1}{4}$.

**2)** En déduire que $f$ admet un maximum en $\frac{1}{2}$.

**3)** Démontrer que $f(x)=\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2$ et en déduire les variations de $f$.

### Exercice 6

Montrer que $f(x)=1-x+\frac{1}{1+x}$ est décroissante sur $]-1;+\infty[$.

### Exercice 7

Soit $f(x)=x+\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

**1)** Montrer que pour tout $x\in[\frac{1}{2};3]$ : $2\leq f(x)\leq\frac{10}{3}$.

**2)** En déduire que pour tous réels strictement positifs $a, b, c, d, e, f, g, h$ : $\frac{a}{h}+\frac{b}{g}+\frac{c}{f}+\frac{d}{e}+\frac{e}{d}+\frac{f}{c}+\frac{g}{b}+\frac{h}{a}\geq 8$.

### Exercice 8

On considère les fonctions $f$ et $g$ définies par $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$ et $g(x)=x-\frac{1}{x}$.

**1)** Déterminer l'ensemble de définition de $g$ et étudier sa parité.

**2)** Montrer que $g$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

**3)** Résoudre l'équation $g(x)=0$ dans $]0;+\infty[$ et en déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

**4)** Étudier les variations de la fonction $g^2$ sur $]0;+\infty[$.

**5)** Déterminer l'ensemble de définition de $f$ et étudier sa parité.

**6)** Exprimer $f(x)$ en fonction de $g^2(x)$.

**7)** En déduire les variations de $f$ sur $]0;+\infty[$, puis dresser son tableau de variation sur son ensemble de définition.

### Exercice 9

Déterminer le plus grand des nombres $A=\frac{1{,}000\,000\,4}{(1{,}000\,000\,6)^2}$ et $B=\frac{(0{,}999\,999\,5)^2}{0{,}999\,999\,8}$.

## 2 Problèmes géométriques

### Exercice 10

Soit $ABC$ un triangle isocèle en $A$, de base $BC=6$ et de hauteur $AH=5$. Pour un point $M$ du segment $[AH]$, on pose $AM=x$ ; la parallèle à $(BC)$ passant par $M$ coupe $[AB]$ en $I$ et $[AC]$ en $J$.

**1)** Calculer $IJ$ en fonction de $x$.

**2) a)** Exprimer, en fonction de $x$, l'aire $y$ du triangle $AIJ$.

**b)** Préciser l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto y$.

**c)** Étudier les variations de $f$.

### Exercice 11

Soit $ABC$ un triangle isocèle en $A$ tel que $AB = AC = 5$ et $BC = 6$. Pour un point $D$ du segment $[AB]$, on pose $AD = x$ ; la parallèle à $(BC)$ passant par $D$ coupe $(AC)$ en $E$.

**1)** Calculer $BD$, $EC$ et $ED$ en fonction de $x$.

**2)** Exprimer en fonction de $x$ le périmètre $y$ du trapèze $BDEC$, puis représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto y$ sur $[0\,;5]$.

**3)** La hauteur issue de $A$ coupe $[DE]$ en $I$ et $[BC]$ en $H$.

**a)** Calculer $AH$.

**b)** Exprimer en fonction de $x$ l'aire $z$ du trapèze $BDEC$.

**c)** Étudier les variations de la fonction $g : x \mapsto z$ sur $[0\,;5]$.

### Exercice 12

Soit $ABC$ un triangle de hauteur $[AH]$ tel que $AB = 5$, $BC = 8$ et $AH = 4$. Pour un point $K$ du segment $[AH]$, on pose $AK = x$ ; la parallèle à $(BC)$ passant par $K$ coupe $[AB]$ en $M$ et $[AC]$ en $N$, et l'on note $P$ et $Q$ les projetés orthogonaux respectifs de $M$ et $N$ sur $(BC)$.

**1)** Exprimer en fonction de $x$ le périmètre $p(x)$ du rectangle $MNQP$, puis étudier les variations de $p$.

**2)** Exprimer en fonction de $x$ l'aire $a(x)$ du rectangle $MNQP$, puis étudier les variations de $a$.

**3)** Déterminer la valeur de $x$ pour laquelle l'aire est maximale et calculer cette aire maximale.

### Exercice 13

Soit $ABCD$ un trapèze isocèle de bases $AB = 12$ et $CD = 6$, tel que $BC = 5$. Pour un point $M$ du segment $[AD]$, on pose $AM = x$ ; la parallèle à $(AB)$ passant par $M$ coupe $(BC)$ en $N$. On note $H$ le projeté orthogonal de $C$ sur $[AB]$ et $E$ le point d'intersection de $(CH)$ et $(MN)$.

**1)** Montrer que $EN = \dfrac{3}{5}(5 - x)$, $EH = \dfrac{4}{5}x$ et $MN = \dfrac{6}{5}(10 - x)$.

**2) a)** Exprimer en fonction de $x$ l'aire $y$ du trapèze $MNBA$.

**b)** Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto y$ sur $[0\,;5]$.

## 3 Fonctions remarquables

### Exercice 14

$f$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x - 10$ si $x > 100$ et $f(x) = f(f(x+11))$ si $x \leq 100$.

**1) a)** Calculer $f(100)$ et $f(99)$.

**b)** Calculer $f(n)$ pour tout entier naturel $n \leq 100$.

**2)** Tracer la courbe de $f$.

### Exercice 15

Soit $f$ une fonction de $[0\,;1]$ dans $[0\,;1]$ telle que, pour tous réels $x$ et $y$ de $[0\,;1]$, $|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$.

**1)** Vérifier que les fonctions $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto 1 - x$ vérifient cette condition.

**2)** Montrer que l'on a soit $f(0)=0$ et $f(1)=1$, soit $f(0)=1$ et $f(1)=0$.

**3)** On suppose $f(0)=0$.

**a)** Montrer que $f(x)\geq x$ pour tout $x\in[0;1]$.

**b)** En déduire que $f(x)=x$ pour tout $x\in[0;1]$.

**4)** Étudier de même le cas $f(0)=1$.

**5)** Conclure : déterminer toutes les fonctions $f$ vérifiant la condition.

**6)** Montrer que les fonctions $x\mapsto\frac{x^2}{2}$, $x\mapsto\frac{x^3}{3}$ et $x\mapsto\frac{1}{1+x}$ sont définies de $[0;1]$ dans $[0;1]$ et vérifient au contraire $|f(x)-f(y)|\leq|x-y|$.

## Exercice 16

$f(x)=1$ si $x\geq 0$ et $f(x)=0$ si $x<0$. On pose $g(x)=2f(x)-f(x-1)$ et $h(x)=g(x-1)+2g(x-2)+\ldots+2009\,g(x-2009)$. Calculer $h(\sqrt{2009})$.

## Exercice 17

$E(x)$ désigne la partie entière de $x$. Montrer que pour tout réel $x$ :

**1)** $2E(x)\leq E(2x)\leq 1+2E(x)$ ;

**2)** $E(\frac{E(2x)}{2})=E(x)$.

## Exercice 18

La figure 2 représente une fonction $u$ ; les deux autres représentent $f(x)=u(x+a)$ et $g(x)=u(x)+b$. Identifier les courbes de $f$ et $g$ et donner $a$ et $b$ (graduations : 1 carreau = 1 en abscisse, 5 en ordonnée).

*Figure 1*

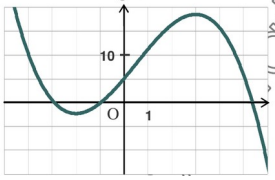



*Figure 2*

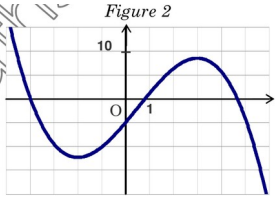
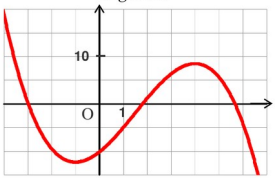



*Figure 3*

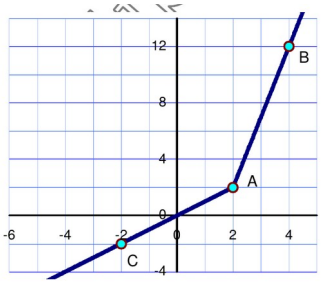



## Exercice 19

$f$ est affine par morceaux sur $\mathbb{R}$ avec $f(x)=a|2-x|+bx+c$, de courbe ci-contre (passant par $C(-2;-2)$, $A(2;2)$, $B(4;12)$).

**1)** Déterminer $a$, $b$, $c$.

**2)** Exprimer $f(x)$ sans valeur absolue.



## Auto-évaluation : vrai ou faux ?

| Affirmation | Vrai | Faux |
|---|---|---|
| 1. Une fonction croissante sur $[0;1]$ et sur $[1;2]$ est croissante sur $[0;2]$. | ☐ | ☐ |
| 2. Si $u$ est décroissante et positive, $u^2$ est décroissante. | ☐ | ☐ |
| 3. $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^*$. | ☐ | ☐ |
| 4. Toute fonction majorée admet un maximum. | ☐ | ☐ |