COURS • 3ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 2 — Généralités sur les fonctions

◆ **Sommaire**

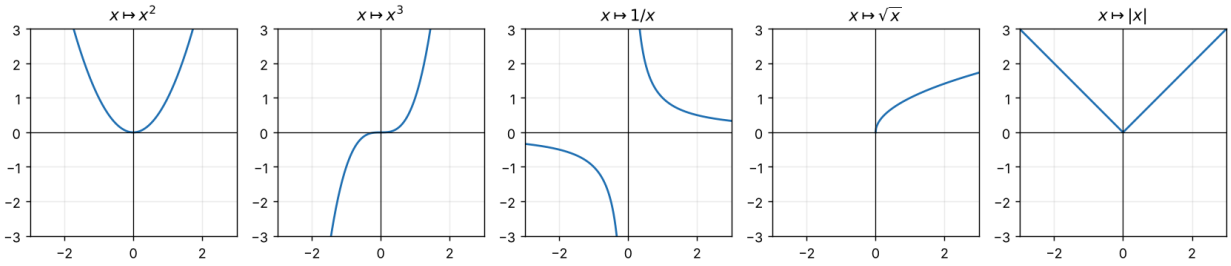
- 1. Rappels : fonctions de référence
- 2. Sens de variation
- 3. Opérations sur les fonctions et variations
- 4. Composée de deux fonctions
- 5. Fonctions majorées, minorées, bornées — extremums
- 6. Parité et périodicité
- 7. Fonctions associées et représentations graphiques
- 8. Fonctions affines par intervalles
- 9. Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir — Objectifs du programme officiel**

- Étudier le sens de variation d'une fonction par le taux de variation, les opérations ou la composition.
- Reconnaître une fonction majorée, minorée, bornée ; déterminer des extremums.
- Exploiter la parité et la périodicité pour réduire l'étude d'une fonction.
- Tracer la courbe d'une fonction associée à partir de celle d'une fonction donnée.

1 Rappels : fonctions de référence

Une fonction numérique f associe à tout réel x de son ensemble de définition D_f un unique réel $f(x)$. Sa courbe représentative C_f est l'ensemble des points $M(x\,;f(x))$ dans un repère du plan.



Fonction	Domaine	Variations
$x \mapsto x^2$	IR	décroissante sur $]-\infty;0]$, croissante sur $[0;+\infty[$
$x \mapsto x^3$	IR	croissante sur IR
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$I R^*$	décroissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	croissante
$x \mapsto \lvert x \rvert$	IR	décroissante sur $]-\infty;0]$, croissante sur $[0;+\infty[$

2 Sens de variation

◆ Définition

Soit f définie sur un intervalle I.

- f est **croissante** sur I si pour tous a, b de I : $a \le b \Rightarrow f(a) \le f(b)$.
- f est **décroissante** sur I si pour tous a, b de I : $a \le b \Rightarrow f(a) \ge f(b)$.
- f est **constante** sur I si $f(a)=f(b)$ pour tous a, b de I ; **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

On définit de même les fonctions **strictement** croissantes ou décroissantes (inégalités strictes).

◆ Théorème — taux de variation

Pour $a \neq b$ dans I, on pose $T(a,b)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Alors f est croissante sur I si et seulement si $T(a,b) \ge 0$ pour tous $a \neq b$ de I, et décroissante si et seulement si $T(a,b) \le 0$.

◆ Exemple corrigé — une fonction homographique

$f(x)=\dfrac{2x+3}{x+5}$ sur $]-5;+\infty[$.

1) Vérifier que $f(x)=2-\dfrac{7}{x+5}$.

2) En déduire le sens de variation de f.

Solution.

1) $2-\dfrac{7}{x+5}=\dfrac{2x+10-7}{x+5}=\dfrac{2x+3}{x+5}$.

2) Pour $a \neq b$ dans $]-5;+\infty[$: $f(b)-f(a)=\dfrac{7}{a+5}-\dfrac{7}{b+5}=\dfrac{7(b-a)}{(a+5)(b+5)}$, donc

$T(a,b)=\dfrac{7}{(a+5)(b+5)}>0$: f est strictement croissante.

3 Opérations sur les fonctions et variations

◆ Propriété — sur un intervalle I

- f et $-f$ ont des sens de variation contraires ; pour $k>0$, kf a le même sens que f.
- Si f et g sont croissantes, $f+g$ est croissante ; si elles sont décroissantes, $f+g$ est décroissante.
- Si f et g sont croissantes **et positives**, fg est croissante.
- Si g ne s'annule pas et garde un signe constant sur I : $\frac{1}{g}$ a le sens de variation **contraire** de celui de g.
- Si f est positive sur I : $\sqrt{f}$ a le même sens de variation que f.

◆ Attention

Sans hypothèse de signe, le produit de deux fonctions croissantes n'est pas forcément croissant : $x\mapsto x$ est croissante sur IR mais $x\mapsto x\times x=x^2$ ne l'est pas.

◆ Démonstration — cas de l'inverse

Si g est croissante et strictement positive, et $a\leq b$: $0<g(a)\leq g(b)$, donc $\frac{1}{g(a)}\geq\frac{1}{g(b)}$; $\frac{1}{g}$ est décroissante. Les autres cas sont analogues.

4 Composée de deux fonctions

◆ Définition

Si u est définie sur I et v sur un ensemble J contenant $u(I)$, la **composée** $v\circ u$ est définie sur I par $(v\circ u)(x)=v(u(x))$.

◆ Théorème

- Si u et v ont le **même** sens de variation (sur I et J), $v\circ u$ est croissante sur I.
- Si u et v ont des sens de variation **contraires**, $v\circ u$ est décroissante sur I.

◆ Démonstration

Si u est croissante et v décroissante, et $a\leq b$ dans I : $u(a)\leq u(b)$, puis $v(u(a))\geq v(u(b))$. Les autres cas se traitent de la même manière.

◆ **Exemple corrigé — décomposer pour étudier**

Étudier les variations de $f(x)=(4-2x)^2$ sur $[2;+\infty[$ et de $g(x)=\sqrt{x^2+1}$ sur IR.

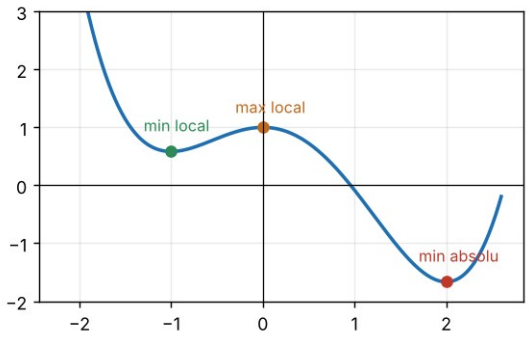
Solution.

- $f=v\circ u$ avec $u(x)=4-2x$, décroissante sur $[2;+\infty[$ et à valeurs dans $]-\infty;0]$, et $v(x)=x^2$, décroissante sur $]-\infty;0]$: même sens, f est croissante.
- $g=w\circ s$ avec $s(x)=x^2+1$ et $w:x\mapsto\sqrt{x}$ croissante sur $[1;+\infty[$: g est décroissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$.

5 Fonctions majorées, minorées, bornées — extremums

◆ **Définition**

- f est **majorée** sur D s'il existe un réel M tel que $f(x)\le M$ pour tout $x\in D$; **minorée** s'il existe m tel que $f(x)\ge m$; **bornée** si elle est majorée et minorée.
- f admet un **maximum absolu** en x_0 si $f(x)\le f(x_0)$ pour tout $x\in D$; un **maximum local** en x_0 si cette inégalité a lieu sur un intervalle ouvert contenant x_0. Même définition pour le minimum.



◆ **Exemple corrigé — majorer et minorer**

$f(x)=\dfrac{2x+3}{x+5}$ sur $[-3;+\infty[$. Montrer que f est bornée.

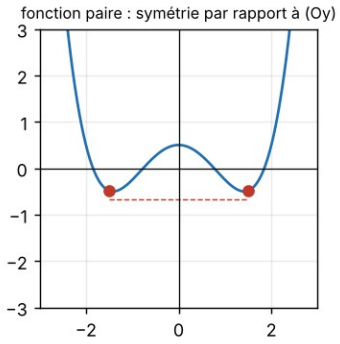
Solution. f est croissante (paragraphe 2), donc $f(x)\ge f(-3)=-\dfrac{3}{2}$: minimum absolu $-\dfrac{3}{2}$ atteint en -3.

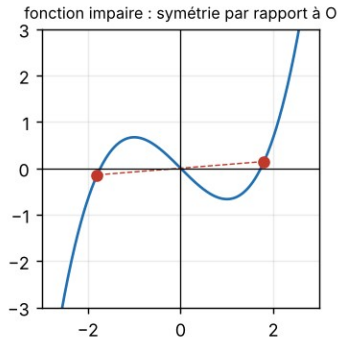
Et $f(x)=2-\dfrac{7}{x+5}<2$. Ainsi $-\dfrac{3}{2}\le f(x)<2$: f est bornée (2 est un majorant, qui n'est pas atteint).

6 Parité et périodicité

◆ Définition

- f est **paire** si pour tout $x \in D_f$: $-x \in D_f$ et $f(-x)=f(x)$. Sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- f est **impaire** si pour tout $x \in D_f$: $-x \in D_f$ et $f(-x)=-f(x)$. Sa courbe est symétrique par rapport à l'origine O.
- f est **périodique** de période $T \neq 0$ si pour tout $x \in D_f$: $x+T \in D_f$, $x-T \in D_f$ et $f(x+T)=f(x)$. Exemples : cos et sin sont 2π-périodiques.





◆ Méthode — réduire le domaine d'étude

- Si f est paire ou impaire, on l'étudie sur $D_f \cap [0;+\infty[$ puis on complète par symétrie.
- Si f est T-périodique, on l'étudie sur un intervalle de longueur T puis on complète par translations de vecteurs $kT\vec{i}$.

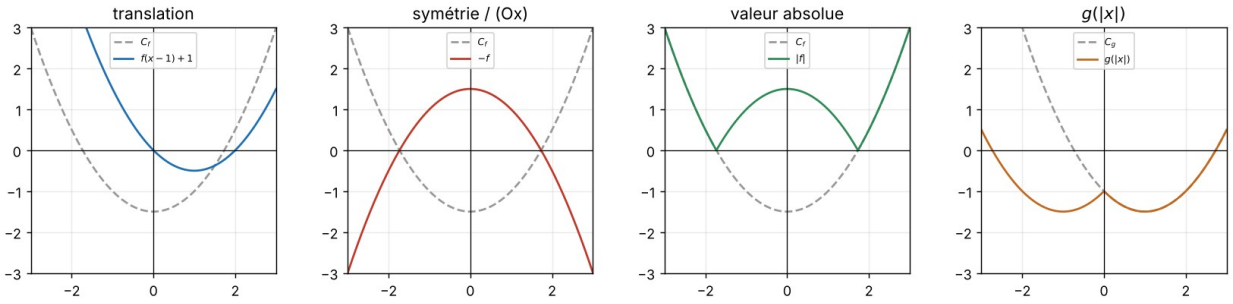
◆ Exemple corrigé — parité

Étudier la parité de $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$ et de $g(x)=x^2+x$.

Solution. $D_f=IR$ est symétrique et $f(-x)=\dfrac{-x^3}{x^2+1}=-f(x)$: f est impaire. $g(-1)=0$ et $g(1)=2$: $g(-1)\neq g(1)$ et $g(-1)\neq -g(1)$, g n'est ni paire ni impaire.

7 Fonctions associées et représentations graphiques

Fonction	Courbe obtenue à partir de C_f
$x \mapsto f(x-a)+b$	image de C_f par la translation de vecteur $a\vec{i}+b\vec{j}$
$x \mapsto -f(x)$	symétrique de C_f par rapport à l'axe des abscisses
$x \mapsto f(-x)$	symétrique de C_f par rapport à l'axe des ordonnées
$x \mapsto \lvert f(x)\rvert$	on garde la partie de C_f au-dessus de (Ox) et on symétrise l'autre
$x \mapsto f(\lvert x\rvert)$	on garde la partie de C_f d'abscisse positive et on la symétrise par rapport à (Oy)



8 Fonctions affines par intervalles

◆ Définition

f est **affine par intervalles** si D_f est une réunion d'intervalles sur chacun desquels $f(x)=ax+b$ (a, b dépendant de l'intervalle). Sa courbe est formée de segments et de demi-droites.

◆ Exemple corrigé — une somme de valeurs absolues

$f(x)=|x-1|+|x+2|$.

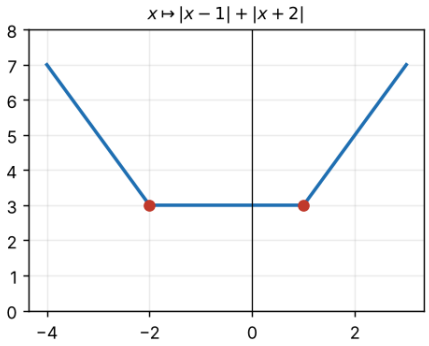
1) Écrire $f(x)$ sans valeur absolue.

2) Tracer C_f et en déduire le minimum de f.

Solution.

1) $x\le -2 : f(x)=-2x-1$; $-2\le x\le 1 : f(x)=3$; $x\ge 1 : f(x)=2x+1$.

2) La courbe est formée de deux demi-droites et d'un segment horizontal : le minimum de f vaut 3, atteint sur tout l'intervalle $[-2;1]$.



Fiche mémo

Notion	À retenir
Variations	signe du taux $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
Produit	f, g croissantes **et positives** ⇒ fg croissante
Inverse	$\frac{1}{g}$: sens contraire de g (g de signe constant, non nulle)
Composée	même sens ⇒ croissante ; sens contraires ⇒ décroissante
Parité	paire : symétrie / (Oy) ; impaire : symétrie / O
Période	$f(x+T)=f(x)$: étude sur un intervalle de longueur T
Associées	$f(x-a)+b$: translation de vecteur $a\vec{i}+b\vec{j}$