EXERCICES • 3ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 19 — Arithmétique

1 Récurrence, divisibilité, PGCD

Exercice 1

Démontrer par récurrence :

1) $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$;

2) $1^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

3) $1^3+\ldots+n^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$;

4) $1\times 1!+2\times 2!+\ldots+n\times n!=(n+1)!-1$;

5) 9 divise 10^n-1 ;

6) 7 divise $2^{3n}-1$;

7) 9 divise $2^{4n+1}-2^{2n}+8$;

8) 6 divise $n(2n+1)(7n+1)$.

Exercice 2

1) Soit n un entier naturel. Déterminer les restes possibles de la division euclidienne de n^2 par 3. En déduire les restes possibles de la division de n^2+p^2 par 3, pour tous entiers naturels n et p.

2) Soit x, y, z des entiers naturels tels que $x^2+y^2=z^2$. Montrer que l'un au moins des entiers x et y est multiple de 3.

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{N}^2$: S_1 : $x+2y=132$ et $x\wedge y=11$; S_2 : $xy=1694$ et $x\vee y=154$; S_3 : $x+y=xy$.

Exercice 4

On divise un nombre de trois chiffres par la somme de ses chiffres : le quotient est 10. Quel est ce nombre ?

Exercice 5

1) Montrer que, pour tout réel x et tout entier naturel n, $(x-1)(1+x+\ldots+x^n)=x^{n+1}-1$.

2) Soit $a\geq 2$ un entier, m et n deux entiers naturels non nuls tels que $m>n$, et r le reste de la division euclidienne de m par n. Montrer que a^r-1 est le reste de la division euclidienne de a^m-1 par a^n-1.

Exercice 6

P est un polynôme à coefficients entiers. Montrer que pour tous entiers p, q : $p-q$ divise $P(p)-P(q)$.

Exercice 7

$a<b$, $d=a\wedge b$, $m=a\vee b$. Trouver les couples tels que $2m+3d=78$ et a ne divise pas b.

Exercice 8

Trouver les couples $(a\,;b)$ tels que $m-18d=791$.

Exercice 9

1) Déterminer les restes possibles de la division euclidienne par 8 du carré d'un entier naturel a.

2) En déduire qu'il n'existe pas d'entiers naturels x, y, z, k tels que $x^2+y^2+z^2=8k+7$.

Exercice 10

Trouver les couples $(a\,;b)$ tels que $m+d=b+9$ $(*)$.

1) Montrer que d divise 9.

2) Résoudre $(*)$.

Exercice 11

Trouver les couples $(a\,;b)$ tels que $d=10$ et $m=100$.

2 Divisibilité et restes

Exercice 12

1) Déterminer les entiers naturels x tels que x^2 divise 2000.

2) Soit a et b deux entiers naturels non nuls ; on note $d=a\wedge b$ et $m=a\vee b$, et l'on suppose que $m^2-5d^2=2000$ $(*)$.

a) Montrer que d^2 divise 2000.

b) Déterminer tous les couples $(a\,;b)$ vérifiant $(*)$.

Exercice 13

1) a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2^{3n}-1$ est un multiple de 7.

b) En déduire que $2^{3n+1}-2$ et $2^{3n+2}-4$ sont des multiples de 7.

2) Déterminer les restes de la division euclidienne par 7 des puissances de 2.

3) Pour tout entier naturel p, on pose $A_p=2^p+2^{2p}+2^{3p}$.

a) Si $p=3n$, déterminer le reste de la division de A_p par 7.

b) Si $p=3n+1$, montrer que 7 divise A_p.

c) Étudier le cas $p=3n+2$.

Exercice 14

$a\wedge c=1$, $c\geq 2$, $f(x)=ax+b$ sur $I=\{0\,;1\,;\ldots\,;c-1\}$ et $r(x)$ le reste de $f(x)$ par c. Montrer que si $r(x)=r(x')$ alors $x=x'$.

Exercice 15

(u_n) est une suite d'entiers naturels telle que pour tous n, p : $u_n\wedge u_p=u_n\wedge u_{n+p}$.

1) Montrer que u_n divise u_0.

2) Montrer que $u_n \wedge u_p = u_{n \wedge p}$.

Exercice 16

1) Montrer que $8\cos^3\frac{\pi}{9} - 6\cos\frac{\pi}{9} - 1 = 0$.

2) En déduire que $\cos\frac{\pi}{9}$ est irrationnel.

3 Nombres premiers

Exercice 17

1) Montrer que tout nombre premier $p \geq 5$ s'écrit sous la forme $6k+1$ ou $6k+5$, avec $k \in \mathbb{N}$. La réciproque est-elle vraie ?

2) On dit que deux nombres premiers p et q sont jumeaux si $q = p+2$. Donner trois exemples de nombres premiers jumeaux. Dans la suite, p et q sont des nombres premiers jumeaux.

3) Montrer que $pq+1$ est un carré parfait.

4) On suppose $p \geq 5$. Montrer que $pq+1$ est divisible par 15.

5) On suppose $p \geq 5$. Montrer que les nombres p, $p+2$ et $p+4$ ne sont pas tous premiers.

6) Déterminer les nombres premiers jumeaux p et q tels que $pq-2$ soit premier.

Exercice 18

1) Montrer que 7 divise $(a+b)^7 - (a^7+b^7)$.

2) En déduire que 7 divise $a+b$ si et seulement si 7 divise a^7+b^7.

3) Trouver les entiers x tels que $9 \leq x \leq 22$ et 7 divise x^7+128.

Exercice 19

Partie A. Montrer que, pour tout réel x, $x^4+4 = (x^2+2)^2 - 4x^2$, puis factoriser x^4+4 en produit de deux trinômes du second degré.

Partie B. Soit $n \geq 2$ un entier ; on pose $A = n^2-2n+2$, $B = n^2+2n+2$ et $d = A \wedge B$.

1) Montrer que n^4+4 n'est pas premier.

2) Montrer que tout diviseur de A qui divise n divise 2.

3) Montrer que tout diviseur commun de A et B divise $4n$.

4) On suppose n impair.

   a) Montrer que A, B et d sont impairs.

   b) Montrer que d divise n.

   c) En déduire que $d = 1$.

5) On suppose n pair.

   a) Montrer que 4 ne divise pas A.

   b) Montrer que $d = 2p$ avec p impair.

   c) Montrer que p divise n, puis que $d = 2$.

Exercice 20

Soit a et b deux entiers naturels non nuls.

1) On suppose que $(a+b) \wedge ab = p$, où p est un nombre premier.

a) Montrer que p divise a^2 (on remarquera que $a^2 = a(a+b) - ab$).

b) En déduire que p divise a, puis que p divise b.

c) Montrer que $p = a \wedge b$.

2) On suppose $a \leq b$.

a) Déterminer les couples $(a\,;b)$ tels que $a \wedge b = 5$ et $a \vee b = 170$.

b) En déduire les couples $(a\,;b)$ tels que $(a+b) \wedge ab = 5$ et $a \vee b = 170$.

Auto-évaluation : vrai ou faux ?

Affirmation	Vrai	Faux
1. Si a divise bc, alors a divise b ou c.	☐	☐
2. $(a \wedge b)(a \vee b) = ab$.	☐	☐
3. Tout entier $n \geq 2$ a un diviseur premier.	☐	☐
4. Un carré est toujours congru à 0 ou 1 modulo 4.	☐	☐