EXERCICES • 3ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 18 — Probabilités

1 Tirages dans des urnes

Exercice 1

Une urne contient 12 boules blanches et 8 boules noires, indiscernables au toucher.

1) On tire simultanément 5 boules de l'urne. Calculer la probabilité d'obtenir :

a) 3 boules blanches et 2 boules noires ;

b) 5 boules de la même couleur ;

c) des boules des deux couleurs.

2) On tire successivement et avec remise 5 boules de l'urne. Calculer la probabilité d'obtenir :

a) 3 boules blanches puis 2 boules noires, dans cet ordre ;

b) 3 boules blanches et 2 boules noires, dans un ordre quelconque.

3) On tire successivement et sans remise 5 boules de l'urne. Calculer la probabilité d'obtenir :

a) exactement une boule blanche ;

b) au moins une boule blanche.

Exercice 2

Une urne contient quatre jetons blancs portant les chiffres 1, 2, 2, 3, trois jetons rouges portant les chiffres 1, 2, 2 et cinq jetons noirs portant les chiffres 1, 1, 2, 2, 3. On tire successivement et sans remise 4 jetons de l'urne. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants : A « les quatre jetons portent le même chiffre » ; B « on obtient 2 jetons blancs, 1 rouge et 1 noir » ; C « on obtient exactement deux jetons rouges et exactement deux jetons portant le chiffre 1 » ; D « la somme des chiffres obtenus est égale à 6 ».

Exercice 3

L'urne U contient six blanches numérotées de 1 à 6 et quatre noires numérotées de 7 à 10.

1) On tire simultanément 3 boules : A « deux couleurs » ; B « au moins une blanche » ; C « exactement une blanche et deux numéros pairs ».

2) On tire successivement avec remise deux boules : E « couleurs différentes » ; F « la valeur absolue de la différence des numéros est 4 » ; H « la somme des numéros est >5 ».

Exercice 4

Une urne contient 3 boules bleues, 2 boules vertes et 5 boules rouges, indiscernables au toucher.

1) On tire simultanément 3 boules. Calculer la probabilité de chacun des événements : A « les trois boules sont de la même couleur » ; B « les trois boules sont de couleurs différentes » ; C « au moins deux boules sont de la même couleur ».

2) On effectue trois tirages successifs d'une boule avec remise. Calculer la probabilité de chacun des événements : E « on obtient une verte, une rouge et une bleue, dans cet ordre » ; F « la première boule verte apparaît au deuxième tirage » ; G « on obtient exactement deux boules bleues ».

Exercice 5

Une urne contient 7 boules numérotées de 1 à 7 ; les boules portant un numéro pair sont blanches, les autres sont rouges.

1) On tire une boule et l'on note p_k la probabilité de tirer la boule numéro k. On suppose que $p_1=p_3=p_5=p_7=a$ et $p_2=p_4=p_6=2a$.

a) Calculer a.

b) Calculer la probabilité de tirer une boule rouge.

2) On tire une boule, on la remet dans l'urne, puis on tire une deuxième boule. Calculer la probabilité d'obtenir :

a) une seule boule blanche ;

b) deux boules blanches ;

c) aucune boule blanche.

Exercice 6

Une boîte contient 8 jetons : un jeton triangulaire rouge, deux jetons triangulaires verts et cinq jetons rectangulaires rouges. On tire simultanément 2 jetons.

1) Calculer la probabilité de chacun des événements : A « les deux jetons ont la même couleur » ; B « les deux jetons ont la même forme ».

2) Définir par une phrase les événements $A\cap B$ et $A\cup B$, puis calculer leurs probabilités.

2 Problèmes

Exercice 7

Une urne contient 2 boules blanches et 4 boules noires.

1) On tire simultanément deux boules. Calculer la probabilité de chacun des événements : A « on obtient au moins une boule blanche » ; B « les deux boules sont de couleurs différentes ».

2) Calculer les probabilités des mêmes événements lorsqu'on effectue deux tirages successifs avec remise.

3) On effectue n tirages successifs avec remise ($n\geq 1$).

a) Calculer la probabilité de n'obtenir aucune boule blanche.

b) Pour $1\leq k\leq n$, on note p_k la probabilité d'obtenir une boule blanche pour la première fois au k-ième tirage. Calculer p_k, puis $P(n)=p_1+p_2+\ldots+p_n$, et enfin $\lim_{n\to+\infty}P(n)$.

Exercice 8

U contient 2 rouges, 3 noires, 1 blanche ; U' contient 1 rouge, 2 noires, 3 blanches. **I.** Trois tirages successifs sans remise dans U : E « trois noires » ; F « première rouge au 2e tirage » ; G « une seule rouge ». **II.** Une boule de U et une boule de U' : A « même couleur » ; B « deux noires » ; C « une noire et une blanche ». **III.** Dans U, blanche et rouges portent le numéro 1, les noires 1, 1 et 2. On tire une boule : si elle porte 1, on la remet puis on tire une seconde boule ; si elle porte 2, on la garde puis on tire une seconde boule. K « deux boules de même couleur » ; L « une rouge et une noire ».

Exercice 9

On dispose de quatre dés cubiques équilibrés dont les faces portent : dé jaune 0, 0, 4, 4, 4, 4 ; dé vert 3, 3, 3, 3, 3, 3 ; dé bleu 2, 2, 2, 2, 6, 6 ; dé rouge 1, 1, 1, 5, 5, 5. Un premier joueur, Monsieur Physique, choisit un

dé ; Monsieur Math choisit ensuite un dé parmi les trois restants. Chacun lance son dé ; celui qui obtient le plus grand nombre gagne.

1) Monsieur Physique choisit le dé jaune et Monsieur Math le dé rouge. À l'aide d'un tableau à double entrée, montrer que Monsieur Math gagne avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

2) Monsieur Physique choisit le dé rouge et Monsieur Math le dé bleu. Montrer que Monsieur Math gagne avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

3) Monsieur Physique choisit le dé bleu. Quel dé Monsieur Math doit-il choisir pour gagner avec la probabilité $\frac{2}{3}$?

4) Même question lorsque Monsieur Physique choisit le dé vert.

Exercice 10

Calculer $p(A \cup B \cup C)$ en fonction de $p(A)$, $p(B)$, $p(C)$, $p(A \cap B)$, $p(A \cap C)$, $p(B \cap C)$ et $p(A \cap B \cap C)$.

Exercice 11

Problème posé à Pascal en 1654 : qu'est-ce qui est le plus probable, obtenir au moins un « six » en lançant quatre fois un dé, ou au moins un « double six » en lançant vingt-quatre fois deux dés ?

Auto-évaluation : vrai ou faux ?

Affirmation	Vrai	Faux
1. $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.	☐	☐
2. Si A et B sont incompatibles, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.	☐	☐
3. Dans un tirage avec remise de 3 boules parmi 10, il y a $C_{10}^{\ 3}$ tirages.	☐	☐
4. $p(A \cup B) \leq p(A) + p(B)$.	☐	☐