COURS • 3ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 18 — Probabilités

◆ **Sommaire**

- 1. Expérience aléatoire, univers, événements
- 2. Opérations sur les événements
- 3. Probabilité sur un ensemble fini
- 4. Propriétés d'une probabilité
- 5. Équiprobabilité
- 6. Modéliser des tirages
- 7. Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir — Objectifs du programme officiel**

- Utiliser le vocabulaire des probabilités ; décrire l'univers d'une expérience aléatoire.
- Calculer la probabilité d'un événement, de son contraire, d'une réunion.
- Utiliser le dénombrement en situation d'équiprobabilité (tirages successifs ou simultanés).

1 Expérience aléatoire, univers, événements

◆ **Définition**

- Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on connaît tous les résultats possibles, mais dont on ne peut prévoir le résultat : seul le hasard intervient.
- Les résultats possibles sont les **éventualités** (ou issues) ; leur ensemble est l'**univers** Ω.
- Un **événement** est une partie de Ω. Il est réalisé si l'issue obtenue lui appartient.

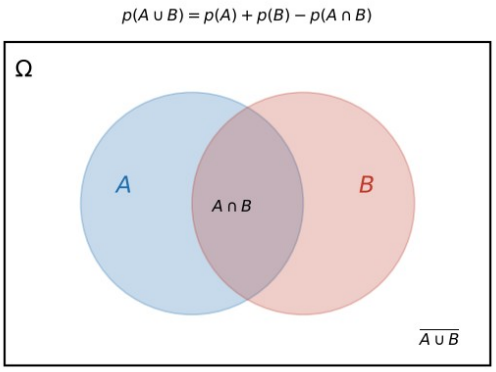
Vocabulaire	Signification
événement certain	Ω
événement impossible	$\varnothing$
événement élémentaire	$\{a\}$: une seule éventualité
$A \subset B$	la réalisation de A entraîne celle de B

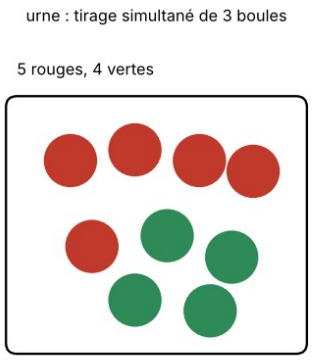
◆ **Exemple corrigé**

On lance un dé : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$. « Obtenir un nombre impair » est l'événement $A = \{1;3;5\}$; « obtenir 6 » est l'événement élémentaire $\{6\}$, inclus dans « obtenir un nombre pair ».

2 Opérations sur les événements

Événement	Notation	Réalisé si...
contraire de A	$\overline{A}$	A n'est pas réalisé
A et B	$A \cap B$	A et B sont réalisés
A ou B	$A \cup B$	au moins l'un des deux est réalisé
A et B incompatibles	$A \cap B = \varnothing$	ils ne peuvent être réalisés ensemble





3 Probabilité sur un ensemble fini

◆ Définition

Soit $\Omega = \{a_1; a_2; \ldots; a_n\}$. Définir une **probabilité** p sur Ω, c'est associer à chaque éventualité a_i un réel $p_i = p(\{a_i\})$ tel que :

- $0 \leq p_i \leq 1$ pour tout i ;
- $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des éventualités qui le composent ; $p(\varnothing) = 0$.

◆ Remarque — interprétation

Lorsqu'on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence d'apparition d'une éventualité se stabilise autour de sa probabilité (loi des grands nombres, admise).

4 Propriétés d'une probabilité

◆ Théorème — pour tous événements A et B

- $0 \leq p(A) \leq 1$; $p(\Omega) = 1$; $p(\varnothing) = 0$.
- Si $A \subset B$, alors $p(A) \leq p(B)$.
- $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$; si A et B sont incompatibles : $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

◆ **Démonstration — réunion**

$A \cup B$ est la réunion disjointe de A et de $B \setminus A$, et B celle de $A \cap B$ et de $B \setminus A$. Donc $p(A \cup B) = p(A) + p(B \setminus A)$ et $p(B) = p(A \cap B) + p(B \setminus A)$; on soustrait.

◆ **Exemple corrigé**

$p(A) = 0{,}5$, $p(B) = 0{,}4$ et $p(A \cap B) = 0{,}1$: $p(A \cup B) = 0{,}8$ et $p(\overline{A \cup B}) = 0{,}2$.

5 Équiprobabilité

◆ **Théorème**

Lorsque toutes les éventualités ont la même probabilité (on dit qu'il y a **équiprobabilité**), chacune a pour probabilité $\dfrac{1}{\operatorname{card} \Omega}$ et pour tout événement A :

$$p(A) = \frac{\operatorname{card} A}{\operatorname{card} \Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

◆ **Remarque**

Les expressions « dé équilibré », « pièce bien équilibrée », « boules indiscernables au toucher », « tirage au hasard » traduisent une situation d'équiprobabilité.

6 Modéliser des tirages

Type de tirage de p boules parmi n	Issues	Nombre d'issues
successifs **avec remise**	p-listes	n^p
successifs **sans remise**	arrangements	$A_n^{\,p}$
simultané	combinaisons	$C_n^{\,p}$

◆ **Exemple corrigé — tirage simultané**

Une urne contient 5 boules rouges et 4 vertes. On tire simultanément 3 boules.

1) Calculer la probabilité d'obtenir 3 boules rouges.

2) Calculer la probabilité d'obtenir exactement 2 rouges.

3) Calculer la probabilité d'obtenir au moins une verte.

Solution. $\text{card}\,\Omega = C_9^{\,3} = 84$ (équiprobabilité).

1) $p = \dfrac{C_5^{\,3}}{84} = \dfrac{10}{84} = \dfrac{5}{42}$.

2) $p = \dfrac{C_5^{\,2} \times C_4^{\,1}}{84} = \dfrac{40}{84} = \dfrac{10}{21}$.

3) C'est le contraire de « 3 rouges » : $p = 1 - \dfrac{5}{42} = \dfrac{37}{42}$.

◆ **Exemple corrigé — tirages successifs**

Même urne ; on tire successivement deux boules **sans remise**. Probabilité d'obtenir deux boules de même couleur ?

Solution. $\text{card}\,\Omega = A_9^{\,2} = 72$. Deux rouges : $A_5^{\,2} = 20$; deux vertes : $A_4^{\,2} = 12$. $p = \dfrac{32}{72} = \dfrac{4}{9}$. (Avec remise : $\dfrac{5^2 + 4^2}{81} = \dfrac{41}{81}$.)

★ Fiche mémo

Notion	À retenir
Probabilité	$p_i \in [0\,;1]$, somme égale à 1 ; $p(A)$ = somme des p_i des issues de A
Contraire	$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
Réunion	$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
Équiprobabilité	$p(A) = \dfrac{\text{card}\,A}{\text{card}\,\Omega}$
Tirages	avec remise n^p ; sans remise $A_n^{\,p}$; simultanés $C_n^{\,p}$
« Au moins un »	passer par l'événement contraire