EXERCICES • 3ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 17 — Droites, plans et sphères de l'espace

1 Droites et plans

Exercice 1

L'espace est muni d'un repère orthonormé. On considère les droites $D_1 : \begin{cases} x = -1+3a \\ y = 1-a \\ z = 2+a \end{cases}$ $(a \in IR)$ et $D_2 : \begin{cases} x = 1-2b \\ y = 1-b \\ z = 2b \end{cases}$ $(b \in IR)$.

1) Montrer que D_1 et D_2 sont sécantes et calculer les coordonnées de leur point d'intersection I.

2) On considère le point $A(0;1;2)$.

a) Déterminer une équation cartésienne du plan P_1 contenant D_1 et A.

b) Déterminer une équation cartésienne du plan P_2 contenant D_2 et A.

c) Déterminer l'intersection des plans P_1 et P_2.

Exercice 2

On considère les droites $D : \begin{cases} x = -1-k \\ y = 1+2k \\ z = 3+k \end{cases}$ $(k \in IR)$ et $D' : \begin{cases} x = 2-3k' \\ y = 1 \\ z = -2k' \end{cases}$ $(k' \in IR)$.

1) Montrer que D et D' ne sont pas coplanaires.

2) Pour tout réel m, on note M le point de D de paramètre $k = m$ et M' le point de D' de paramètre $k' = m$. Montrer que la droite (MM') reste parallèle à un plan fixe que l'on déterminera.

Exercice 3

Pour tout réel m, on considère le plan $P_m : 2mx + (m+1)y - 3(m-1)z + 2m + 4 = 0$.

1) Pour quel m P_m passe-t-il par $A(1;1;2)$?

2) Peut-on trouver m pour que P_m passe par $B(-1;-3;-1)$?

3) Pour quel m $\overrightarrow{AB}$ est-il un vecteur directeur de P_m ?

Exercice 4

Pour tout réel m, on considère le plan $P_m : (2m+1)x - 2y + (m+1)z - 3m + 4 = 0$.

1) Montrer que tous les plans P_m contiennent une même droite Δ et en donner une représentation paramétrique.

2) On considère les droites $\Delta_1 : \begin{cases} x = 1-2a \\ y = 3+a \\ z = 1+4a \end{cases}$ $(a \in IR)$ et $\Delta_2 : \begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$.

a) Montrer que Δ_1 et Δ_2 sont sécantes en un point I du plan P_0.

b) Déterminer une équation du plan Q contenant Δ_1 et Δ_2.

c) Soit O' le symétrique de O par rapport à I. Déterminer une équation du plan P' passant par O' et parallèle à P_0.

d) Déterminer une représentation paramétrique de la droite $D = P' \cap Q$.

3) a) Existe-t-il un plan P_m passant par le point $A\left(\frac{1}{2};0;2\right)$?

b) On note E l'ensemble des plans P_m et F l'ensemble des plans contenant Δ. A-t-on $E = F$? Justifier.

Exercice 5

Pour tous réels a et m, on considère la droite $\Delta_a : \begin{cases} x+1=0 \\ y-z-a=0 \end{cases}$ et le plan $P_m : (m+1)x-(m-1)y+(2m+3)z+2=0$.

1) Déterminer un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$ de Δ_a.

2) Étudier la position relative de Δ_a et de P_m suivant les valeurs de a et de m.

3) Montrer que tous les plans P_m contiennent une même droite D ; en donner un point B et un vecteur directeur $\vec{v}$.

4) Déterminer a pour que D et Δ_a soient coplanaires, puis déterminer une équation du plan Q qui les contient.

Exercice 6

Pour tout réel m, on considère le point $A_m(m-1;m;m+1)$ et la droite $D : \begin{cases} x=2-k \\ y=1+k \\ z=3 \end{cases} (k \in IR)$.

1) Déterminer l'ensemble Δ des points A_m lorsque m décrit IR.

2) Pour quelle valeur de m a-t-on $A_m \in D$?

3) Pour $m \neq 2$, déterminer une équation du plan P_m passant par A_m et contenant D. Que remarque-t-on ?

4) Pour tout réel a, on considère la droite $D_a : \begin{cases} x=-1+ab \\ y=1+(a-1)b \\ z=1+ab \end{cases} (b \in IR)$.

a) Les droites D et D_a peuvent-elles être parallèles ?

b) Déterminer une équation du plan Q_a contenant D_a et parallèle à D.

c) Montrer que tous les plans Q_a contiennent une même droite D' parallèle à D.

2 Plans à paramètre

Exercice 7

Pour tout réel m, on considère le plan $P_m : mx+2y-m^2z+3=0$.

1) Déterminer les plans P_m passant par le point $A(2;0;1)$.

2) Déterminer l'intersection des plans P_{-1} et P_1.

3) Montrer que tous les plans P_m passent par un même point fixe B.

4) Étudier, suivant les valeurs de m, la position relative de la droite (AB) et du plan P_m.

5) Soit D la droite passant par B et dirigée par $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$. Donner une représentation paramétrique de D.

6) Montrer que les droites (OA) et D ne sont pas coplanaires.

7) Déterminer une équation du plan Q contenant (OA) et parallèle à D.

8) Déterminer m pour que les plans Q et P_m soient parallèles.

Exercice 9

L'espace est muni d'un repère orthonormé. On considère les points $A(1;2;-1)$ et $B(2;1;1)$.

1) Déterminer une équation du plan Q passant par A et perpendiculaire à (AB).

2) Pour tout réel m, on considère le plan $P_m : x+y+m-3=0$.

   a) Montrer que la droite (AB) est parallèle à P_m.

   b) Déterminer m pour que (AB) soit contenue dans P_m.

   c) Montrer que les plans P_m et Q sont perpendiculaires.

3) On note A' et B' les projetés orthogonaux respectifs de A et B sur P_m. Déterminer m pour que $ABB'A'$ soit un carré.

3 Sphères

Exercice 8

L'espace est muni d'un repère orthonormé. On considère les points $A(2;-3;-1)$, $B(1;0;2)$ et $C(0;1;3)$.

1) a) Montrer que A, B et C ne sont pas alignés.

   b) Déterminer une équation du plan $P=(ABC)$.

2) Pour $t\in[-\pi;\pi[$, on considère l'ensemble S_t des points $M(x;y;z)$ tels que $x^2+y^2+z^2-2x-2y\sin t+2z+t^2+\sin^2 t-1=0$. Montrer que S_t est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

3) a) Déterminer, suivant les valeurs de t, l'intersection de S_t et de P.

   b) Étudier le cas où P est tangent à S_t.

Exercice 10

L'espace est muni d'un repère orthonormé. On considère les points $A(1;-1;2)$ et $B(-1;1;-2)$.

1) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

2) Soit P le plan passant par A et perpendiculaire à (AB), et Q le plan d'équation $x-y+2z+6=0$.

   a) Déterminer une équation de P.

   b) Vérifier que Q passe par B et qu'il est parallèle à P.

3) Soit (S) la sphère tangente en B au plan Q et qui coupe P suivant le cercle de centre A et de rayon $2\sqrt{3}$; on note $I(a;b;c)$ son centre.

   a) Montrer que $I\in(AB)$.

   b) En déduire que $b=-a$ et $c=2a$.

   c) Montrer que $IB^2-IA^2=12$ et en déduire que $a-b+2c=3$.

   d) Déterminer les coordonnées de I et une équation de (S).

Exercice 11

L'espace est muni d'un repère orthonormé. On considère les points $A(1;2;0)$, $B(0;1;-1)$, $C(2;0;-2)$ et la droite D passant par A et dirigée par $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.

1) Soit ζ l'ensemble des points M tels que $MA^2+MB^2=3$. Montrer que ζ est la sphère de diamètre $[AB]$.

2) Montrer que D coupe ζ en A et en un second point A' que l'on déterminera.

3) a) Montrer que A, B, C ne sont pas alignés.

b) Soit G le centre de gravité du triangle ABC. Montrer que A est le projeté orthogonal de G sur D.

4) Soit ζ' l'ensemble des points M tels que $MA^2+MB^2+MC^2=9$.

a) Montrer que, pour tout point M, $MA^2+MB^2+MC^2=3MG^2+6$.

b) En déduire la nature de ζ'.

c) Étudier la position relative de ζ' et de D.

d) Vérifier qu'une équation de ζ' est $x^2+y^2+z^2-2x-2y+2z+2=0$.

5) a) Montrer que $M\in\zeta\cap\zeta'$ si et seulement si $M\in\zeta'$ et $x-y-z=0$.

b) En déduire que $\zeta\cap\zeta'$ est un cercle dont on déterminera le centre H et le rayon.

Auto-évaluation : vrai ou faux ?

Affirmation	Vrai	Faux
1. Deux droites de l'espace non parallèles sont sécantes.	☐	☐
2. Le vecteur $(2;-1;3)$ est normal au plan $2x-y+3z+5=0$ (repère orthonormé).	☐	☐
3. Si $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$, la droite de vecteur directeur $\vec{u}$ est parallèle au plan de normale $\vec{n}$.	☐	☐
4. $x^2+y^2+z^2+1=0$ est l'équation d'une sphère.	☐	☐