COURS • 3ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 17 — Droites, plans et sphères de l'espace

◆ **Sommaire**

- 1. Représentation paramétrique d'une droite
- 2. Représentation paramétrique d'un plan
- 3. Équation cartésienne d'un plan
- 4. Positions relatives de droites et de plans
- 5. Distance d'un point à un plan
- 6. Sphère : définition et équation
- 7. Intersection d'une sphère et d'un plan
- 8. Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir — Objectifs du programme officiel**

- Déterminer une représentation paramétrique d'une droite, d'un plan ; une équation cartésienne d'un plan.
- Étudier les positions relatives de droites et de plans ; calculer une distance.
- Reconnaître une équation de sphère ; étudier l'intersection d'une sphère et d'un plan.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère $A(x_0;y_0;z_0)$, $\vec{u}(a;b;c)$ et $\vec{v}(a';b';c')$.

1 Représentation paramétrique d'une droite

◆ **Théorème**

Pour $\vec{u}\neq\vec{0}$, la droite $D(A,\vec{u})$ est l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que $\overrightarrow{AM}=\lambda\vec{u}$, $\lambda\in IR$, soit :

$$\begin{cases} x=x_0+\lambda a \\ y=y_0+\lambda b \\ z=z_0+\lambda c \end{cases} \quad \lambda\in IR.$$

◆ **Exemple corrigé**

Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) avec $A(1;2;-1)$ et $B(3;1;2)$. Le point $C(5;0;5)$ lui appartient-il ?

Solution. $\overrightarrow{AB}(2;-1;3)$: (AB) : $x=1+2\lambda$, $y=2-\lambda$, $z=-1+3\lambda$. Pour C : $1+2\lambda=5$ donne $\lambda=2$, puis $y=0$ et $z=5$: $C\in(AB)$.

2 Représentation paramétrique d'un plan

◆ **Théorème**

Pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires, le plan $\mathscr{P}(A,\vec{u},\vec{v})$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$, soit :

$$\begin{cases} x=x_0+\lambda a+\mu a' \\ y=y_0+\lambda b+\mu b' \\ z=z_0+\lambda c+\mu c' \end{cases} \quad \lambda,\mu\in IR.$$

3 Équation cartésienne d'un plan

◆ **Théorème**

- Tout plan admet une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$ avec $(a;b;c)\neq(0;0;0)$; le vecteur $\vec{n}(a;b;c)$ lui est **normal**.
- Réciproquement, pour $(a;b;c)\neq(0;0;0)$, l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que $ax+by+cz+d=0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$.
- Le vecteur $\vec{w}(\alpha;\beta;\gamma)$ est un vecteur du plan (parallèle au plan) si et seulement si $a\alpha+b\beta+c\gamma=0$.

◆ **Démonstration**

Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par $A(x_0;y_0;z_0)$ de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$. $M\in\mathscr{P}\iff\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0\iff a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$, de la forme $ax+by+cz+d=0$ avec $d=-a\,x_0-b\,y_0-c\,z_0$.

◆ **Méthode — équation du plan (ABC)**

- Calculer un vecteur normal $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ (ou résoudre $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$) ;
- écrire $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$.

◆ **Exemple corrigé**

Équation du plan passant par $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;3)$.

Solution. $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=(6;3;2)$ (chapitre 16). $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=6(x-1)+3y+2z=0:6x+3y+2z-6=0$.
Vérification : B et C satisfont l'équation.

4 Positions relatives de droites et de plans

Soit $D(A,\vec{u})$, $D'(A',\vec{u'})$, $\mathscr{P}:ax+by+cz+d=0$ et $\mathscr{P}':a'x+b'y+c'z+d'=0$ de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n'}$.

Position	Condition
$D \perp D'$ (orthogonales)	$\vec{u}\cdot\vec{u'}=0$
$D \parallel D'$	$\vec{u}$ et $\vec{u'}$ colinéaires
$\mathscr{P} \perp \mathscr{P}'$	$\vec{n}\cdot\vec{n'}=0$
$\mathscr{P} \parallel \mathscr{P}'$	$\vec{n}$ et $\vec{n'}$ colinéaires
$D \perp \mathscr{P}$	$\vec{u}$ et $\vec{n}$ colinéaires
$D \parallel \mathscr{P}$	$\vec{u}\cdot\vec{n}=0$

◆ **Méthode — intersection d'une droite et d'un plan**

On remplace x, y, z de la représentation paramétrique de la droite dans l'équation du plan : une solution unique en λ donne le point d'intersection ; aucune solution : droite strictement parallèle ; une infinité : droite contenue dans le plan.

◆ **Exemple corrigé**

$D : x=1+t$, $y=2t$, $z=3-t$ et $\mathscr{P} : x+y+z-6=0$. On obtient $1+t+2t+3-t-6=0$, soit $t=1$: le point d'intersection est $(2\,;2\,;2)$.

5 Distance d'un point à un plan

◆ **Théorème**

La distance du point $A(x_0\,;y_0\,;z_0)$ au plan $\mathscr{P} : ax+by+cz+d=0$ est :

$$d(A,\mathscr{P})=\frac{|a x_0+b y_0+c z_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

◆ **Démonstration**

Soit H le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$: $d(A,\mathscr{P})=AH$. Comme $\overrightarrow{HA}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, $|\overrightarrow{HA}\cdot\vec{n}|=AH\times\|\vec{n}\|$. Or $\overrightarrow{HA}\cdot\vec{n}=a(x_0-x_H)+b(y_0-y_H)+c(z_0-z_H)=a x_0+b y_0+c z_0+d$ car $H\in\mathscr{P}$.

◆ **Exemple corrigé**

Distance de O au plan $6x+3y+2z-6=0$: $\dfrac{|-6|}{\sqrt{36+9+4}}=\dfrac{6}{7}$.

6 Sphère : définition et équation

◆ Définition

- La **sphère** de centre I et de rayon $R>0$ est l'ensemble $\mathscr{S}(I,R)$ des points M tels que $IM=R$.
- La sphère de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

◆ Théorème — équation

$M(x;y;z)\in\mathscr{S}(I,R)$ avec $I(a;b;c) \Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

Réciproquement, soit E l'ensemble des points tels que $x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$. On pose $h=\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{4}-\delta$ et $\Omega\left(-\dfrac{\alpha}{2};-\dfrac{\beta}{2};-\dfrac{\gamma}{2}\right)$:

- si $h<0$: $E=\varnothing$;
- si $h=0$: $E=\{\Omega\}$;
- si $h>0$: E est la sphère de centre Ω et de rayon $\sqrt{h}$.

◆ Exemple corrigé

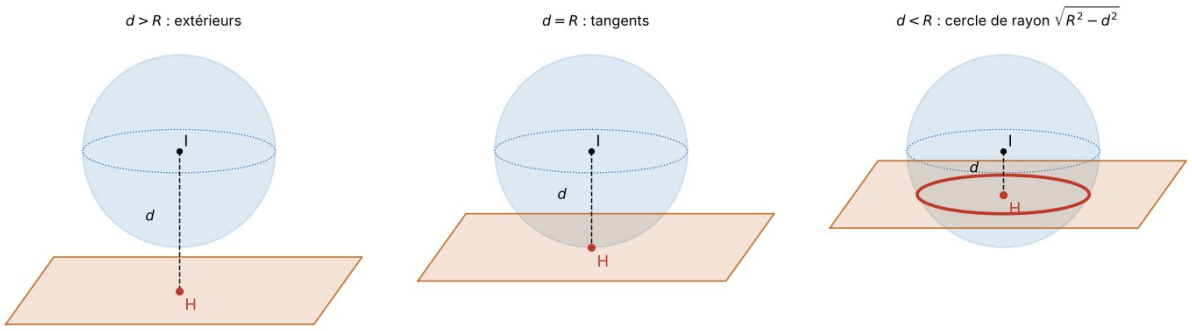
$x^2+y^2+z^2-2x+4y-4=0$ s'écrit $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=9$: sphère de centre $(1;-2;0)$ et de rayon 3.

7 Intersection d'une sphère et d'un plan

◆ Théorème

Soit $\mathscr{S}$ de centre I et de rayon R, $\mathscr{P}$ un plan, H le projeté orthogonal de I sur $\mathscr{P}$ et $d=IH=d(I,\mathscr{P})$.

- Si $d>R$: $\mathscr{P}\cap\mathscr{S}=\varnothing$ (extérieurs).
- Si $d=R$: $\mathscr{P}\cap\mathscr{S}=\{H\}$; le plan est **tangent** à la sphère en H.
- Si $d<R$: $\mathscr{P}\cap\mathscr{S}$ est le cercle de $\mathscr{P}$ de centre H et de rayon $\sqrt{R^2-d^2}$ (sécants).



◆ Démonstration

Pour $M\in\mathscr{P}$, le triangle IHM est rectangle en H : $IM^2=d^2+HM^2$. Donc $M\in\mathscr{S} \Leftrightarrow HM^2=R^2-d^2$, d'où les trois cas.

◆ **Exemple corrigé**

La sphère de centre $(1;-2;0)$ et de rayon 3 et le plan $z=2$: $d=2<3$, intersection : cercle de centre $(1;-2;2)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

★ Fiche mémo

Notion	À retenir
Droite	$x=x_0+\lambda a,\ y=y_0+\lambda b,\ z=z_0+\lambda c$
Plan	$ax+by+cz+d=0$, normal $\vec{n}(a;b;c)$
Distance	$\dfrac{\lvert a\,x_0+b\,y_0+c\,z_0+d\rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$
Parallèles / perpendiculaires	normaux colinéaires / orthogonaux
Sphère	$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$
Sphère ∩ plan	comparer $d(I,\mathscr{P})$ et R ; rayon du cercle $\sqrt{R^2-d^2}$