EXERCICES • 3ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 16 — Produit scalaire et produit vectoriel dans l'espace

1 Produit scalaire

Exercice 1

Repère orthonormé ; $A(0;1;-1)$, $B(3;2;1)$, $C(2;0;2)$.

1) Vérifier que ABC est isocèle.

2) Calculer $\cos\widehat{BAC}$.

3) Soit P l'ensemble des M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{CA}$: montrer que P est le plan médiateur de $[BC]$.

Exercice 2

L'espace est muni d'un repère orthonormé. Pour tout réel m, on considère les points $A(m+1;2m-3;2-2m)$, $B(3;1;-2)$, $C(4;0;2)$ et $D(1;3;0)$.

1) Déterminer m pour que le triangle ABC soit rectangle en A.

2) Déterminer m pour que A appartienne au plan médiateur de $[BC]$.

3) Vérifier que les points B, C et D ne sont pas alignés.

4) Déterminer m pour que la droite (AC) soit perpendiculaire au plan (BCD).

Exercice 3

$ABCD$ est un tétraèdre ; I, J, K, L les milieux de $[BC]$, $[BD]$, $[CA]$, $[DA]$.

1) Exprimer $\overrightarrow{LI}$ et $\overrightarrow{KJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

2) Montrer que $(LI)\perp(KJ)$ si et seulement si $AB=CD$.

Exercice 4

Soit A, B, C et D quatre points distincts de l'espace.

1) Exprimer AC^2-AD^2 et BC^2-BD^2 à l'aide de produits scalaires.

2) Démontrer que $(AB)\perp(CD)$ si et seulement si $AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$.

3) Application : $ABCD$ est un tétraèdre tel que $(AB)\perp(CD)$ et $(BC)\perp(AD)$. Montrer que $(BD)\perp(AC)$.

Exercice 5

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête a ; I est l'intersection de (EC) et du plan (AFH). Montrer que (EC) est perpendiculaire au plan (AFH).

Exercice 6

$ABCD$ est un tétraèdre régulier d'arête c.

1) Démontrer que $(AB)\perp(CD)$.

2) Démontrer que (IJ), joignant les milieux de $[AB]$ et $[CD]$, est perpendiculaire à (AB) et à (CD).

3) Calculer la hauteur du tétraèdre.

Exercice 7

M, N, P, Q sont les milieux de $[AB]$, $[BC]$, $[DC]$, $[DA]$ (A, B, C, D quelconques). Démontrer que $2(MP^2+NQ^2)=AC^2+BD^2$.

Exercice 8

Dans un parallélépipède d'arêtes $[DA]$, $[DB]$, $[DC]$, les segments $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$ sont des diagonales. Montrer que $AA'^2+BB'^2+CC'^2=BC^2+CA^2+AB^2+DA^2+DB^2+DC^2$.

2 Produit vectoriel

Exercice 9

On dessine dans le plan de la feuille ; « • » désigne un vecteur entrant, « ∘ » un vecteur sortant. Déterminer le troisième vecteur pour que $(O;\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ soit un repère orthogonal direct :

a) $\vec{w}$ entrant et $\vec{u}$ vers la droite ;

b) $\vec{v}$ vers la gauche et $\vec{u}$ sortant ;

c) $\vec{v}$ vers la gauche et $\vec{w}$ vers le haut.

Exercice 10

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs unitaires et orthogonaux.

1) Déterminer les vecteurs $(\vec{v}\wedge\vec{u})\wedge\vec{u}$, $(\vec{v}\wedge\vec{v})\wedge\vec{u}$ et $(\vec{u}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v}))\wedge\vec{u}$.

2) Déterminer l'ensemble des vecteurs $\vec{w}$ tels que $(\vec{v}\wedge\vec{w})\wedge\vec{u}=\vec{0}$.

Exercice 11

A, B, C sont trois points. Démontrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{CB}$.

Exercice 12

Soit ABC un triangle isocèle et rectangle en A.

1) Prouver, sans calcul, que le vecteur $\vec{u}=(\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BA})\wedge\overrightarrow{AC}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ et que le vecteur $\vec{v}=\overrightarrow{BC}\wedge(\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{AC})$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

2) Déterminer les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

3) Le produit vectoriel est-il associatif ? Justifier.

Exercice 13

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les vecteurs $\vec{u}=\frac{1}{2}(\vec{i}-\sqrt{3}\vec{j})$, $\vec{v}=\frac{1}{4}(\sqrt{6}\vec{i}+\sqrt{2}\vec{j}-2\sqrt{2}\vec{k})$ et $\vec{w}=\frac{1}{4}(\sqrt{6}\vec{i}+\sqrt{2}\vec{j}+2\sqrt{2}\vec{k})$.

1) Démontrer que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base orthonormée.

2) Cette base est-elle directe ? Justifier.

3 Volume et distance

Exercice 14

Soit $ABCD$ un tétraèdre et H le pied de la hauteur issue de A, c'est-à-dire le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD).

1) Montrer que $(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{BA} = (\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{HA}$.

2) Montrer que $|(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{BA}| = \|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}\| \times HA$.

3) En déduire que le volume du tétraèdre est $V = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{BA}|$.

4) Application : calculer le volume du tétraèdre $ABCD$ avec $A(-2;3;4)$, $B(0;-1;1)$, $C(2;0;-4)$ et $D(-3;5;0)$.

Exercice 15

Soit D la droite passant par B et dirigée par $\vec{u}$, A un point n'appartenant pas à D et H le projeté orthogonal de A sur D.

1) Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{AH} \wedge \vec{u}$.

2) En déduire que $AH = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.

3) Application : calculer la distance du point $A(-2;3;4)$ à la droite (BC), avec $B(0;-1;1)$ et $C(1;2;1)$.

Auto-évaluation : vrai ou faux ?

Affirmation	Vrai	Faux
1. Dans l'espace, deux droites orthogonales sont sécantes.	☐	☐
2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$ impliquent que $\vec{u}$ est normal au plan dirigé par $\vec{v}$ et $\vec{w}$ (non colinéaires).	☐	☐
3. $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ est l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.	☐	☐
4. $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{v} \wedge \vec{u}$.	☐	☐