COURS • 3ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 16 — Produit scalaire et produit vectoriel dans l'espace

◆ **Sommaire**

- 1. Produit scalaire dans l'espace
- 2. Propriétés — inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski
- 3. Bases et repères orthonormés — expression analytique
- 4. Orthogonalité : droites, vecteur normal à un plan
- 5. Produit vectoriel : définition
- 6. Propriétés et expression analytique du produit vectoriel
- 7. Applications : aire, volume, vecteur normal
- 8. Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir — Objectifs du programme officiel**

- Calculer un produit scalaire dans l'espace ; démontrer une orthogonalité.
- Déterminer un vecteur normal à un plan.
- Calculer un produit vectoriel ; l'utiliser pour calculer des aires et des volumes.

1 Produit scalaire dans l'espace

◆ **Définition**

Soit $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$. Les points O, A, B sont dans un même plan, où l'on définit le produit scalaire :

- si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$: $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$;
- sinon : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\widehat{AOB}$.

◆ **Propriété — conséquences**

- $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH}$ où H est le projeté orthogonal de B sur (OA).
- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$.
- $\vec{u}\perp\vec{v}\iff\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

2 Propriétés — inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski

◆ **Propriété — pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et réels a, b**

- $\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$; $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$; $(a\vec{u})\cdot(b\vec{v})=ab(\vec{u}\cdot\vec{v})$; $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$.
- $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}$; $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}$.
- Identité du parallélogramme : $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=2\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2\right)$.

◆ **Théorème**

- **Cauchy-Schwarz** : $|\vec{u}\cdot\vec{v}|\le\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$, avec égalité si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- **Minkowski** : $\|\vec{u}+\vec{v}\|\le\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$, avec égalité si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens.

◆ **Démonstration**

$|\cos\widehat{AOB}|\le 1$ donne Cauchy-Schwarz. Puis $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}\le\left(\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|\right)^2$.

3 Bases et repères orthonormés — expression analytique

◆ **Définition**

- Une base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est **orthogonale** si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux ; **orthonormée** s'ils sont de plus unitaires.
- Un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est orthonormé si sa base l'est.

◆ **Théorème — dans une base orthonormée**

Si $\vec{u}(a;b;c)$ et $\vec{v}(a';b';c')$:

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=aa'+bb'+cc'$;
- $\|\vec{u}\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$.

◆ **Exemple corrigé**

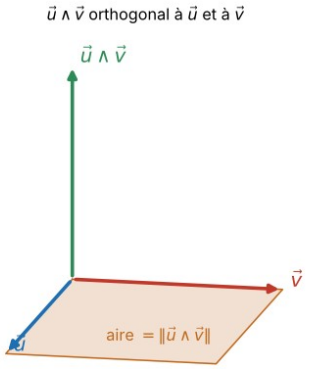
$A(1;0;2)$, $B(3;1;0)$, $C(2;0;3)$. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A et calculer son aire.

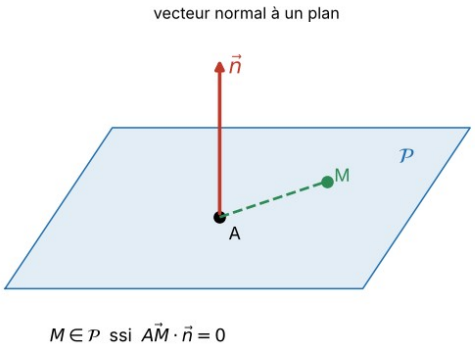
Solution. $\overrightarrow{AB}(2;1;-2)$ et $\overrightarrow{AC}(1;0;1)$: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2+0-2=0$, donc $(AB)\perp(AC)$: le triangle est rectangle en A. $AB=\sqrt{4+1+4}=3$ et $AC=\sqrt{2}$, d'où l'aire $\frac{1}{2}\times 3\times\sqrt{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

4 Orthogonalité : droites, vecteur normal à un plan

Définition

- Les droites $D(A,\vec{u})$ et $D(B,\vec{v})$ sont **orthogonales** si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.
- Un vecteur non nul $\vec{n}$ est **normal** au plan $\mathscr{P}$ s'il est orthogonal à deux vecteurs directeurs (non colinéaires) de $\mathscr{P}$.





Propriété

- Il existe un unique plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$: c'est l'ensemble des points M tels que $\vec{AM}\cdot\vec{n}=0$.
- $\vec{n}$ est normal à $\mathscr{P}(O,\vec{u},\vec{v}) \Leftrightarrow \vec{n}\cdot\vec{u}=0$ et $\vec{n}\cdot\vec{v}=0$.
- Deux vecteurs normaux à un même plan sont colinéaires.
- Deux plans de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont perpendiculaires $\Leftrightarrow \vec{n}\cdot\vec{n'}=0$; parallèles $\Leftrightarrow$ $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ colinéaires.
- Une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ est perpendiculaire à $\mathscr{P} \Leftrightarrow \vec{u}$ est normal à $\mathscr{P}$.

5 Produit vectoriel : définition

Définition

L'espace est orienté. Soit $\vec{u}=\vec{AB}$ et $\vec{v}=\vec{AC}$. Le **produit vectoriel** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{u}\wedge\vec{v}$ défini par :

- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires : $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$;
- sinon : $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$, la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{u}\wedge\vec{v})$ est **directe**, et $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\sin\widehat{BAC}$.

6 Propriétés et expression analytique du produit vectoriel

Propriété

- $\vec{u}\wedge\vec{u}=\vec{0}$; $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- Antisymétrie : $\vec{v}\wedge\vec{u}=-\vec{u}\wedge\vec{v}$.
- $(a\vec{u})\wedge(b\vec{v})=ab(\vec{u}\wedge\vec{v})$; $\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$.

◆ **Théorème — dans une base orthonormée directe**

Si $\vec{u}(a;b;c)$ et $\vec{v}(a';b';c')$, alors $\vec{u}\wedge\vec{v}(bc'-cb';ca'-ac';ab'-ba')$.

Moyen mnémotechnique : on calcule trois déterminants 2×2 en « barrant » successivement chaque ligne (en changeant le signe du deuxième).

◆ **Exemple corrigé**

Calculer $\vec{u}\wedge\vec{v}$ pour $\vec{u}(1;2;-1)$ et $\vec{v}(3;0;2)$, puis vérifier l'orthogonalité.

Solution. $\vec{u}\wedge\vec{v}(2\times 2-(-1)\times 0;(-1)\times 3-1\times 2;1\times 0-2\times 3)=(4;-5;-6)$. Vérification : $4\times 1+(-5)\times 2+(-6)\times(-1)=0$ et $4\times 3+0+(-6)\times 2=0$.

7 Applications : aire, volume, vecteur normal

◆ **Propriété**

- $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC) (si A, B, C ne sont pas alignés).
- Aire du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$: $\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$; aire du triangle ABC : $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$.
- Volume du tétraèdre $ABCD$: $V=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}|$ (et $\frac{1}{6}|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})|$).
- Distance d'un point M à la droite $D(A,\vec{u})$: $d=\dfrac{\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.

◆ **Exemple corrigé**

$A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;3)$. Calculer l'aire du triangle ABC et le volume du tétraèdre $OABC$.

Solution. $\overrightarrow{AB}(-1;2;0)$, $\overrightarrow{AC}(-1;0;3)$, $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(6;3;2)$, de norme $\sqrt{36+9+4}=7$. L'aire vaut $\frac{7}{2}$.

Le volume vaut $\frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AO}|=\frac{1}{6}|6\times(-1)|=1$.

Fiche mémo

Notion	À retenir
Produit scalaire	$aa'+bb'+cc'$ (base orthonormée) ; nul $\Leftrightarrow$ orthogonaux
Norme	$\|\vec{u}\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$
Vecteur normal	orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan
Produit vectoriel	$(bc'-cb';ca'-ac';ab'-ba')$; orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$
Colinéarité	$\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$
Aire	triangle : $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$
Volume	tétraèdre : $\frac{1}{6}\|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}\|$