EXERCICES • 3ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 15 — Vecteurs de l'espace

1 Dans un tétraèdre

Exercice 1

$ABCD$ est un tétraèdre ; E et F vérifient $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Démontrer que B, E, F sont alignés.

Exercice 2

$ABCD$ est un tétraèdre ; $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CG}$. Exprimer $\overrightarrow{AH}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$. Que peut-on en déduire pour A, C, D, G, H ?

Exercice 3

Dans un tétraèdre $ABCD$: $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{12}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

1) Montrer que A, L, M sont alignés.
2) Montrer que $(LK)\parallel(MD)$.
3) En déduire (sans calcul) que A, L, M, D, K sont coplanaires.
4) N vérifie $\overrightarrow{BN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$: trouver α, β tels que $\overrightarrow{AN}=\alpha\overrightarrow{AM}+\beta\overrightarrow{AD}$. Conclure.

2 Coordonnées et déterminant

Exercice 4

$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère R.
1) $\vec{u}(1;1;-1)$, $\vec{v}(-1;0;3)$, $\vec{w}(-1;1;5)$ sont-ils coplanaires ?
2) Prouver que $\vec{e}_1(2;0;1)$, $\vec{e}_2(-1;1;2)$, $\vec{e}_3(0;0;3)$ forment une base.
3) Coordonnées de $M(-2;6;5)$ dans $(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$.
4) $A(-2;-1;0)$: coordonnées de M dans $(A;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$.
5) Valeurs de a pour lesquelles $(1;-1;3)$, $(0;1;1)$, $(a;1-a;2)$ sont coplanaires.

Exercice 5

I, J, K, L, M, N sont les milieux de $[AB]$, $[CD]$, $[BC]$, $[DA]$, $[BD]$, $[AC]$ dans un tétraèdre $ABCD$.
1) $\overrightarrow{KM}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CL}$ sont-ils coplanaires ?
2) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{NJ}$?
3) Démontrer que $[IJ]$, $[KL]$, $[MN]$ ont le même milieu O.

4) En déduire $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

5) Coordonnées de O et K dans $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$.

Exercice 6

$A(1;1;-2), B(0;2;1), C(-1;2;3), D(0;3;2)$.

1) Vérifier que A, B, C ne sont pas alignés ; $P=(ABC)$.

2) Montrer que $D\in P$.

3) $F(1-a;a;a+1)$: déterminer a pour que $(AF)\subset P$.

4) $\vec{e}_1=3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{e}_2=\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{e}_3=\vec{i}+2\vec{j}$.

a) Montrer que $R'=(A;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ est un repère.

b) Coordonnées de B dans R'.

Auto-évaluation : vrai ou faux ?

Affirmation	Vrai	Faux
1. Trois vecteurs dont deux sont colinéaires sont coplanaires.	☐	☐
2. Quatre points de l'espace sont toujours coplanaires.	☐	☐
3. Si $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=0$, alors $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires.	☐	☐
4. Deux droites parallèles sont coplanaires.	☐	☐