COURS • 3ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 15 — Vecteurs de l'espace

◆ **Sommaire**

- 1. Vecteurs de l'espace — rappels
- 2. Vecteurs colinéaires — droites
- 3. Combinaisons linéaires — vecteurs coplanaires — plans
- 4. Parallélisme de droites et de plans
- 5. Bases et repères de l'espace
- 6. Composantes et coordonnées
- 7. Déterminant de trois vecteurs
- 8. Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir — Objectifs du programme officiel**

- Reconnaître des vecteurs colinéaires, coplanaires ; caractériser droites et plans de l'espace.
- Démontrer un alignement, une coplanarité, un parallélisme à l'aide des vecteurs.
- Utiliser les coordonnées et le déterminant de trois vecteurs.

1 Vecteurs de l'espace — rappels

Les notions de vecteur, d'égalité de vecteurs, de somme (relation de Chasles, règle du parallélogramme) et de produit par un réel s'étendent du plan à l'espace avec les mêmes règles de calcul.

◆ **Propriété**

- Pour tout point A et tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{AM}=\vec{u}$.
- $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow ABCD$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).
- I milieu de $[AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$; G centre de gravité de $ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

2 Vecteurs colinéaires — droites

◆ **Définition**

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si l'un est le produit de l'autre par un réel.
- Soit A un point et $\vec{u}\neq\vec{0}$. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires est la **droite** $D(A,\vec{u})$ passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$: $M\in D \Leftrightarrow$ il existe $\alpha\in IR$ tel que $\overrightarrow{AM}=\alpha\vec{u}$.

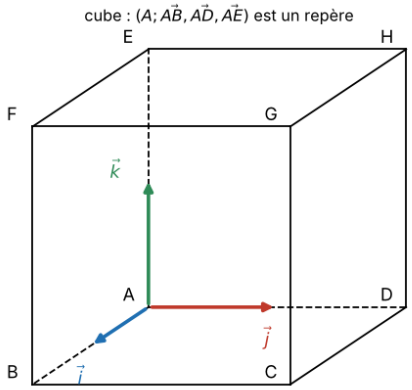
Propriété

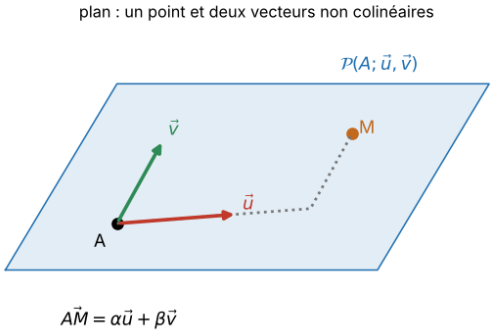
- A, B, C sont alignés $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
- $D(A, \vec{u})$ et $D(B, \vec{v})$ sont parallèles $\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

3 Combinaisons linéaires — vecteurs coplanaires — plans

Définition

- $\vec{w}$ est une **combinaison linéaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'il existe deux réels α, β tels que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.
- Trois vecteurs sont **coplanaires** (la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est **liée**) si l'un d'eux est combinaison linéaire des deux autres.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ (α, β réels) est le **plan** $\mathscr{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$ passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$, $\vec{v}$.





Propriété

- Quatre points O, A, B, C sont **coplanaires** $\Leftrightarrow$ la famille $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}$ est liée.
- Trois points non alignés A, B, C définissent un unique plan $(ABC) = \mathscr{P}(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Exemple corrigé — dans un tétraèdre

$ABCD$ est un tétraèdre ; I est le milieu de $[AB]$ et J celui de $[CD]$. Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.

Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ sont-ils coplanaires ?

Solution. $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ}$ et $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CJ}$. En ajoutant, comme $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{CJ} = \vec{0}$: $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$. Ainsi $\overrightarrow{IJ}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$: les trois vecteurs sont coplanaires.

4 Parallélisme de droites et de plans

◆ **Théorème**

- $D(A,\vec{u})$ est parallèle à $\mathscr{P}(B,\vec{v},\vec{w})$ ⇔ la famille $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ est liée.
- $\mathscr{P}(A,\vec{u},\vec{v})$ et $\mathscr{Q}(B,\vec{u'},\vec{v'})$ sont parallèles ⇔ les familles $\{\vec{u},\vec{v},\vec{u'}\}$ et $\{\vec{u},\vec{v},\vec{v'}\}$ sont liées.

5 Bases et repères de l'espace

◆ **Définition**

- Un triplet $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une **base** de l'espace si la famille $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ n'est pas liée (vecteurs non coplanaires).
- $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un **repère cartésien** si $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une base.

◆ **Propriété**

$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ est une base ⇔ les points A, B, C, D ne sont pas coplanaires.

6 Composantes et coordonnées

◆ **Théorème**

Soit $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base. Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un **unique** triplet de réels $(x\,;y\,;z)$ tel que $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$: ce sont les **composantes** de $\vec{u}$.

Dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, les **coordonnées** de M sont les composantes de $\overrightarrow{OM}$.

◆ **Propriété**

- $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A\,;y_B-y_A\,;z_B-z_A)$; milieu de $[AB]$: $\left(\frac{x_A+x_B}{2}\,;\frac{y_A+y_B}{2}\,;\frac{z_A+z_B}{2}\right)$.
- Les composantes de $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$ s'obtiennent composante par composante.
- $\vec{u}(a\,;b\,;c)$ et $\vec{v}(a'\,;b'\,;c')$ sont colinéaires ⇔ leurs composantes sont proportionnelles.

7 Déterminant de trois vecteurs

◆ **Définition**

Dans une base $\mathscr{B}$, soit $\vec{u}(a\,;b\,;c)$, $\vec{v}(a'\,;b'\,;c')$, $\vec{w}(a''\,;b''\,;c'')$. Le **déterminant** de $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est le réel (développement suivant la première colonne) :

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=a(b'c''-c'b'')-b(a'c''-c'a'')+c(a'b''-b'a'').$$

◆ **Théorème**

- $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une **base** $\Leftrightarrow \det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\neq 0$.
- La famille $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ est **liée** (vecteurs coplanaires) $\Leftrightarrow \det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=0$.

◆ **Exemple corrigé**

Les points $A(1;0;2)$, $B(2;1;0)$, $C(0;3;1)$ et $D(3;4;-1)$ sont-ils coplanaires ?

Solution. $\overrightarrow{AB}(1;1;-2)$, $\overrightarrow{AC}(-1;3;-1)$, $\overrightarrow{AD}(2;4;-3)$.

$\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=1\times(3\times(-3)-(-1)\times 4)-1\times((-1)\times(-3)-(-1)\times 2)$
$+(-2)\times((-1)\times 4-3\times 2)$

$=-5-5+20=10\neq 0$.

Les vecteurs ne sont pas coplanaires : les quatre points ne sont pas coplanaires.

★ Fiche mémo

Notion	À retenir
Droite	$M\in D(A,\vec{u}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=\alpha\vec{u}$
Plan	$M\in\mathscr{P}(A,\vec{u},\vec{v}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$
Coplanaires	l'un est combinaison linéaire des deux autres $\Leftrightarrow$ déterminant nul
Droite // plan	$\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ liée
Base	trois vecteurs non coplanaires $\Leftrightarrow$ déterminant non nul
Déterminant	$a(b'c''-c'b'')-b(a'c''-c'a'')+c(a'b''-b'a'')$