EXERCICES • 3ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 14 — Fonctions trigonométriques

1 Limites et variations

Exercice 1

Calculer : $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\sin x}$; $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 3x}$; $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x^2}$; $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}$; $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 2x}$; $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin x}$; $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{2\sin x\cos 2x-\sin 2x}$.

Exercice 2

Calculer, quand elles existent : $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2x-\pi}$; $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x-1}{4x-\pi}$; $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin 3x}{\cos 3x+1}$; $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan x}{\cos 2x}$; $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\cos x-1}{4\sin^2 x-3}$; $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x+\cos^2 x}{\sin x+\cos^2 x-1}$; $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\tan x$.

Exercice 3

On considère les fonctions h et g définies sur $[-\pi;\pi]$ par $h(x)=x\cos x-\sin x$, et $g(x)=\frac{\sin x}{x}$ si $x\neq 0$, $g(0)=1$.

1) Étudier les variations de h sur $[-\pi;\pi]$.

2) En déduire le signe de $h(x)$ sur $[-\pi;\pi]$.

3) Montrer que g est continue en 0.

4) On admet que g est dérivable en 0 et que $g'(0)=0$. Étudier les variations de g sur $[-\pi;\pi]$.

5) Calculer $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\pi\sin x-3x}{6x^2-\pi x}$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=1+\sin x+\cos x+\sin x\cos x$ et ζ sa courbe.

1) Montrer que, pour tout réel x, $f(x)=(1+\cos x)(1+\sin x)$.

2) Montrer que la droite $\Delta: x=\frac{\pi}{4}$ est un axe de symétrie de ζ.

3) Justifier qu'il suffit d'étudier f sur l'intervalle $[\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}]$.

4) Montrer que $f'(x)=(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x+1)$.

5) Dresser le tableau de variation de f sur $[\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}]$.

6) Tracer la courbe ζ.

2 Études de fonctions

Exercice 5

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{(1+\sin x)^2}$ et ζ sa courbe.

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

2) a) Montrer que la droite $\Delta : x=\dfrac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de ζ.

b) En déduire qu'il suffit d'étudier f sur $D_E=]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}]$.

3) a) Montrer que, pour tout $x\in D_E$, $f'(x)=\dfrac{-2\cos x(1+2\sin x)}{(1+\sin x)^3}$.

b) Dresser le tableau de variation de f sur D_E.

4) a) Calculer $f(0)$, $f(\dfrac{\pi}{4})$ et $f(-\dfrac{\pi}{4})$.

b) Tracer ζ sur l'intervalle $]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}[$.

5) Soit g la fonction définie par $g(x)=f(x+\dfrac{\pi}{2})+1$. Montrer que la courbe de g est l'image de ζ par une translation que l'on précisera.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=\cos(x-\dfrac{\pi}{6})$ et ζ sa courbe.

1) a) Déterminer la période de f.

b) Montrer que la droite d'équation $x=\dfrac{7\pi}{6}$ est un axe de symétrie de ζ.

c) Déterminer le point d'inflexion I de ζ dont l'abscisse appartient à $[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{7\pi}{6}]$.

d) Déterminer une équation de la tangente à ζ en I.

e) Montrer que I est un centre de symétrie de ζ.

2) Étudier les variations de f sur $[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{2\pi}{3}]$ et tracer ζ.

3) Soit g la fonction définie sur $[0;\pi]$ par $g(x)=\dfrac{2\cos(2x-\dfrac{\pi}{3})+1}{2(2\cos(x-\dfrac{\pi}{6})-1)}$ si $x\neq\dfrac{\pi}{2}$ et $g(\dfrac{\pi}{2})=1$.

a) Étudier la continuité de g en $\dfrac{\pi}{2}$.

b) Montrer qu'il existe une constante a telle que $g(x)=f(x)+a$ pour tout $x\in[0;\pi]$.

c) Tracer la courbe de g.

Exercice 7

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{4\cos^2 2x}{2\cos 2x-1}$ et ζ sa courbe.

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

2) Montrer que la droite d'équation $x=\dfrac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de ζ.

3) a) Montrer que $f'(x)=\dfrac{8\sin 4x(1-\cos 2x)}{(2\cos 2x-1)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f sur $[0;\dfrac{\pi}{2}[\cap D_f$.

4) a) Construire la courbe ζ' de la restriction de f à $[0;\pi]\cap D_f$.

b) Expliquer comment on obtient ζ à partir de ζ'.

5) On considère l'équation $(E):3\cos^2 2x-2k\cos 2x+k=0$, où k est un réel. À l'aide de ζ', déterminer les valeurs de k pour lesquelles (E) admet quatre solutions distinctes dans $[0;\pi]$.

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $[0;2]$ par $f(x)=E(x)\sin(\pi x)$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

1) Écrire $f(x)$ sans partie entière sur chacun des intervalles $[0;1[$, $[1;2[$ et en $x=2$.

2) Montrer que f est continue sur $[0;2]$.

3) Étudier la dérivabilité de f en 1.

4) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f et calculer $f'(x)$.

5) Dresser le tableau de variation de f.

Auto-évaluation : vrai ou faux ?

Affirmation	Vrai	Faux
1. $x\mapsto\cos 3x$ a pour période $\dfrac{2\pi}{3}$.	☐	☐
2. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=\dfrac{1}{2}$.	☐	☐
3. $(\tan x)'=1+\tan^2 x$.	☐	☐
4. Une fonction paire et π-périodique s'étudie sur $[0;\dfrac{\pi}{2}]$.	☐	☐