COURS • 3ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 14 — Fonctions trigonométriques

◆ **Sommaire**

- 1. Fonctions périodiques
- 2. Les fonctions sinus et cosinus
- 3. La fonction tangente
- 4. Limites remarquables
- 5. Dérivées et périodes des fonctions $x \mapsto \sin(ax+b)$, $\cos(ax+b)$, $\tan(ax+b)$
- 6. Étude d'une fonction trigonométrique
- 7. Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir — Objectifs du programme officiel**

- Reconnaître une fonction périodique, déterminer sa période et réduire le domaine d'étude.
- Connaître les courbes de sinus, cosinus, tangente et les limites remarquables.
- Dériver et étudier des fonctions trigonométriques ; tracer leurs courbes.

1 Fonctions périodiques

◆ **Définition**

f, définie sur D, est **périodique** s'il existe un réel $t \neq 0$ tel que pour tout $x \in D$: $x+t \in D$, $x-t \in D$ et $f(x+t)=f(x)$. Le réel t est **une période** de f ; le plus petit réel $t>0$ qui soit une période, s'il existe, est **la période** de f, notée T.

◆ **Propriété**

- Si T est une période de f, tout multiple kT ($k \in \mathbb{Z}^*$) en est une.
- La courbe de f se déduit de sa partie sur $[\,a\,;a+T\,]$ par les translations de vecteurs $kT\,\vec{i}$, $k \in \mathbb{Z}$.

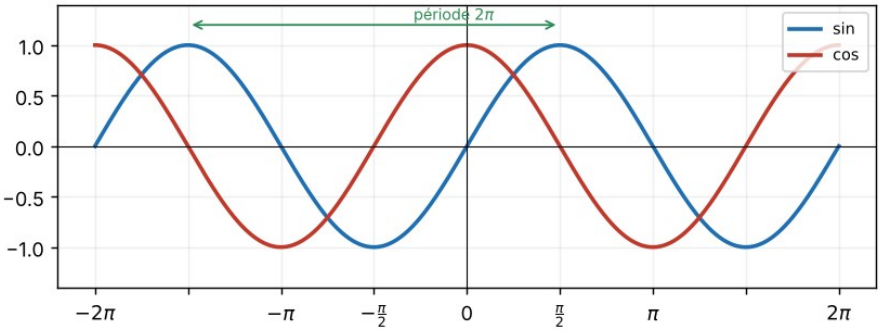
◆ **Exemple corrigé**

f est définie sur $[\,-10\,;10\,]$, paire et de période 2 : par parité on se ramène à $[\,0\,;10\,]$, puis par périodicité à $[\,0\,;1\,]$ (en combinant parité et période 2, l'intervalle $[\,0\,;1\,]$ suffit).

2 Les fonctions sinus et cosinus

Propriété

- sin et cos sont définies, continues et dérivables sur IR, de période 2π.
- sin est impaire, cos est paire ; $\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$: la courbe de cos se déduit de celle de sin par la translation de vecteur $-\frac{\pi}{2}\vec{i}$.
- $(\sin)' = \cos$ et $(\cos)' = -\sin$.



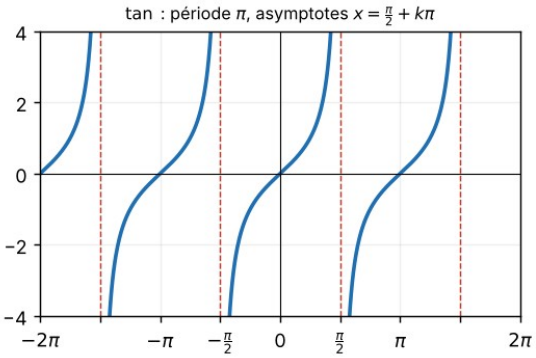
x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin x$	0	↗	1	↘	0
$\cos x$	1	↘	0	↘	-1

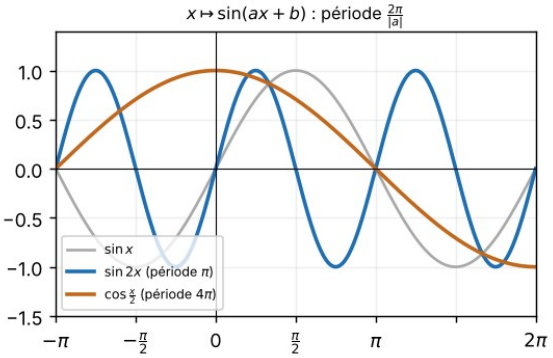
Étude sur $[0;\pi]$; on complète par imparité (ou parité) puis par périodicité.

3 La fonction tangente

Propriété

- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ est définie sur $D = IR \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, impaire et de période π.
- Elle est dérivable sur chaque intervalle de D et $(\tan)' = 1+\tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$: elle est strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$.
- $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$: les droites $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ sont asymptotes verticales.





4 Limites remarquables

$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$	$\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$	$\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=0$	$\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$
$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{x}=a$	$\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan ax}{x}=a$	$\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{x}=0$	$\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{x^2}=\dfrac{a^2}{2}$

◆ **Démonstration — lien avec la dérivée**

$\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{\sin x-\sin 0}{x-0}$ est le taux de variation de $\sin$ en 0 : sa limite est $\sin'(0)=\cos 0=1$. De même $\dfrac{\tan x}{x}\to\tan'(0)=1$. Enfin $\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}\to\dfrac{1}{2}$.

◆ **Exemple corrigé**

- $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}\times\dfrac{x}{\sin 2x}=\dfrac{5}{2}$.
- $\lim_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\times\dfrac{x^2}{1-\cos x}=1\times 2=2$.

5 Dérivées et périodes ($a\neq 0$)

Fonction	Dérivée	Période
$\sin(ax+b)$	$a\cos(ax+b)$	$\dfrac{2\pi}{\lvert a\rvert}$
$\cos(ax+b)$	$-a\sin(ax+b)$	$\dfrac{2\pi}{\lvert a\rvert}$
$\tan(ax+b),\ ax+b\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$	$a(1+\tan^2(ax+b))$	$\dfrac{\pi}{\lvert a\rvert}$

◆ **Démonstration — période de $\sin(ax+b)$**

$\sin\left(a\left(x+\frac{2\pi}{a}\right)+b\right)=\sin(ax+b+2\pi)=\sin(ax+b)$, donc $\frac{2\pi}{|a|}$ est une période ; c'est la plus petite car 2π est la période de $\sin$.

6 Étude d'une fonction trigonométrique

◆ **Exemple corrigé — $f(x)=\sin 2x-2\sin x$**

1) Montrer que f est 2π-périodique et impaire ; en déduire qu'il suffit de l'étudier sur $[0;\pi]$.

2) Calculer $f'(x)$ et l'écrire sous forme factorisée.

3) Dresser le tableau de variation de f sur $[0;\pi]$.

Solution.

1) $f(x+2\pi)=f(x)$ et $f(-x)=-\sin 2x+2\sin x=-f(x)$. Étude sur $[-\pi;\pi]$ (une période), réduite à $[0;\pi]$ par imparité.

2) $f'(x)=2\cos 2x-2\cos x=2(2\cos^2 x-\cos x-1)=2(2\cos x+1)(\cos x-1)$.

3) Sur $[0;\pi]$, $\cos x-1\le 0$; $f'(x)\ge 0 \Leftrightarrow 2\cos x+1\le 0 \Leftrightarrow x\in[\frac{2\pi}{3};\pi]$. Donc f est décroissante sur $[0;\frac{2\pi}{3}]$ et croissante sur $[\frac{2\pi}{3};\pi]$, avec $f(0)=f(\pi)=0$ et un minimum $f(\frac{2\pi}{3})=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

★ Fiche mémo

Notion	À retenir
Périodes	$\sin,\cos : 2\pi$; $\tan : \pi$; $\sin(ax+b) : \frac{2\pi}{\lvert a\rvert}$
Parités	$\sin$, $\tan$ impaires ; $\cos$ paire
Dérivées	$(\sin u)'=u'\cos u$; $(\cos u)'=-u'\sin u$; $(\tan)'=1+\tan^2$
Limites	$\frac{\sin x}{x}\to 1$; $\frac{\tan x}{x}\to 1$; $\frac{1-\cos x}{x^2}\to\frac{1}{2}$
Domaine d'étude	une période, puis parité éventuelle