EXERCICES • 3ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 13 — Étude des fonctions

1 Polynômes et familles de courbes

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=x^2-4|x-1|$.

1) Écrire $f(x)$ sans valeur absolue, puis dresser le tableau de variation de f.

2) Tracer la courbe C_f de f dans un repère orthonormé.

Exercice 2

Partie I. Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+4$ et ζ_f sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Étudier les variations de f, déterminer l'axe de symétrie de ζ_f et préciser ses branches infinies.

2) Déterminer une équation de la tangente D à ζ_f au point d'abscisse 3.

3) Étudier la position relative de ζ_f et de D.

4) On considère le point $S(2;2)$. Déterminer une équation de ζ_f dans le repère $(S;\vec{i},\vec{j})$.

5) Soit M le point de ζ_f d'abscisse a, et P et Q ses projetés orthogonaux respectifs sur l'axe des ordonnées et sur l'axe des abscisses. Déterminer a pour que $OQMP$ soit un carré, et montrer qu'alors M appartient à une droite que l'on précisera.

Partie II. Pour tout réel m, on considère la fonction f_m définie sur IR par $f_m(x)=\frac{1}{2}(x^2-2mx+m(m+2))$ et l'on note ζ_m sa courbe.

1) Vérifier que la fonction f de la partie I appartient à cette famille.

2) Dresser le tableau de variation de f_m.

3) Déterminer les coordonnées du sommet S_m de ζ_m, puis l'ensemble Σ des points S_m lorsque m décrit IR.

4) Montrer que la droite D de la partie I est tangente à toutes les courbes ζ_m.

5) a) Déterminer l'ensemble Δ des points de ζ_m en lesquels la tangente est parallèle à la droite d'équation $y=-x$.

b) Que peut-on dire des droites Σ, Δ et D ?

6) a) Montrer que $f_0(x-m)=f_m(x)-m$.

b) En déduire que ζ_m est l'image de ζ_0 par une transformation que l'on précisera.

c) Construire ζ_0, ζ_1, D, Σ et Δ.

Exercice 3

Pour tout réel m, on considère la fonction f_m définie sur IR par $f_m(x)=x^2-mx+m$, et l'on note C_m sa courbe.

1) Montrer que toutes les courbes C_m passent par un même point fixe A que l'on déterminera.

2) Déterminer les coordonnées du sommet S_m de C_m, puis l'ensemble des points S_m lorsque m décrit IR. Dans la suite, on prend $m=2$.

3) a) Étudier la fonction f_2 et construire sa courbe ζ_2.

b) Déterminer une équation de la tangente T à ζ_2 parallèle à la droite $\Delta: 3x+y-1=0$.

4) Soit g la fonction définie par $g(x)=x^2-4x$.

a) Tracer sa courbe ζ_g dans le même repère.

b) Résoudre l'équation $f_2(x)=g(x)$ et interpréter graphiquement.

5) Étudier et tracer la courbe de la fonction h définie par $h(x)=x^2-|2x-2|$.

Exercice 4

Partie I. Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=4x^3-3x+1$ et ζ_f sa courbe.

1) Étudier les variations de f.

2) Montrer que le point $I(0;1)$ est centre de symétrie de ζ_f.

3) Déterminer une équation de la tangente D à ζ_f au point I.

4) Étudier la position relative de D et de ζ_f.

5) Tracer ζ_f.

6) On considère l'équation $(E_m): 8x^3-6x+m=0$. Déterminer les valeurs du réel m pour lesquelles (E_m) admet trois solutions distinctes.

7) Construire la courbe de la fonction h définie par $h(x)=-4|x|^3+3|x|+1$.

Partie II. Pour tout réel $a\neq 0$, on considère la fonction f_a définie sur IR par $f_a(x)=\frac{4}{a^2}x^3-3x+a$.

1) Étudier les variations de f_a suivant les valeurs de a.

2) a) Déterminer les coordonnées des points M_a et N_a de la courbe de f_a correspondant aux extremums.

b) Déterminer l'ensemble des points M_a et l'ensemble des points N_a lorsque a décrit $I\,R^*$.

Partie III. Pour tout réel m, on pose $g_m(x)=f_1(x)-mf_2(x)$.

1) Étudier les variations de g_m suivant les valeurs de m.

2) Montrer que toutes les courbes des fonctions g_m passent par deux points fixes A et B (A d'abscisse positive) que l'on déterminera.

Exercice 5

Pour tout réel m, on considère la fonction f_m définie sur IR par $f_m(x)=mx^3-x^2+(2-3m)x+2m$, et l'on note ζ_m sa courbe.

Partie I.

1) Étudier la fonction f_0 et construire sa courbe ζ_0.

2) Soit $x_0\in\,]1;2]$ et T la tangente à ζ_0 au point d'abscisse x_0.

a) Déterminer une équation de T.

b) On considère le point $A(0;1)$. La tangente T coupe la droite $\Delta: y=1$ en B et l'axe des abscisses en C. i) Montrer que l'aire du trapèze $OABC$ est $S=\frac{2x_0^2-1}{4(x_0-1)}$. ii) Déterminer la valeur de x_0 pour laquelle S est minimale.

Partie II.

1) Étudier la fonction $f_{\frac{2}{3}}$ et construire sa courbe $\zeta_{\frac{2}{3}}$.

2) a) Montrer que $\zeta_{\frac{2}{3}}$ admet un point d'inflexion I.

b) Vérifier que I est centre de symétrie de $\zeta_{\frac{2}{3}}$.

3) Montrer que ζ_0 et $\zeta_{\frac{2}{3}}$ se coupent en deux points E et F, et préciser leur position relative.

4) Pour tout réel k, on considère la droite $\Delta_k : 3y - 3kx - 4 = 0$. Déterminer, suivant les valeurs de k, le nombre de points d'intersection de Δ_k et de $\zeta_{\frac{2}{3}}$.

Partie III.

1) Montrer que toutes les courbes ζ_m passent par les points E et F.

2) Déterminer le nombre de tangentes à ζ_m parallèles à la droite (EF).

3) Étudier les variations de f_m suivant les valeurs de m.

4) Montrer que toutes les courbes ζ_m ont la même tangente au point d'abscisse 1.

Exercice 6

Pour tout réel m, on considère la fonction f_m définie sur IR^* par $f_m(x) = \dfrac{x^2+5x+m}{x}$, et l'on note ζ_m sa courbe.

1) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles f_m est monotone sur chacun des intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$.

2) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles f_m admet un maximum et un minimum ; donner les coordonnées des points correspondants et déterminer leur ensemble lorsque m varie.

3) Soit A_m le point de ζ_m d'abscisse 4 et T_m la tangente à ζ_m en A_m.

a) Déterminer une équation de T_m.

b) Montrer que T_m coupe la droite $\Delta : y = x+5$ en un point fixe B que l'on déterminera.

2 Changements de repère

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $IR \setminus \{-2\}$ par $f(x) = \dfrac{3-x}{x+2}$ et ζ sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Étudier f et construire ζ.

2) Pour tout réel m, on considère la droite $D_m : y = 2x+m$.

a) Montrer, sans les calculer, que ζ et D_m se coupent en deux points M et N.

b) Montrer que le produit scalaire $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$ ne dépend pas de m.

3) On considère le point $A(1;2)$. Calculer $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$ en fonction de m, puis en déduire la valeur de m pour laquelle le triangle MAN est rectangle en A.

4) Déterminer une équation de ζ dans le repère $(S;\vec{i},\vec{j})$, où $S(-2;-1)$.

Exercice 8

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2-4x+3}$ et ζ sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) Étudier la dérivabilité de f à droite en 3 et à gauche en 1 ; interpréter graphiquement les résultats.

3) Montrer que la droite d'équation $x=2$ est un axe de symétrie de ζ.

4) Étudier les variations de f.

5) Calculer $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x+2)$ et $\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x-2)$; interpréter graphiquement.

6) Tracer ζ.

7) En déduire la courbe de la fonction $g:x\mapsto f(|x|)$.

8) Tracer la courbe ζ' de la fonction $-f$.

9) Vérifier que $\zeta\cup\zeta'$ a pour équation $x^2-y^2-4x+3=0$.

10) On pose $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{v}=-\vec{i}+\vec{j}$ et $\Omega(2;0)$.

a) Déterminer une équation de $\Gamma=\zeta\cup\zeta'$ dans le repère $(\Omega;\vec{u},\vec{v})$.

b) Conclure sur la nature de Γ.

3 Familles de fonctions rationnelles

Exercice 9

Partie A. Pour tout réel $m\neq0$, on considère la fonction f_m définie par $f_m(x)=\dfrac{x^2+2x+m^2+1}{mx+m}$ et l'on note Γ_m sa courbe.

1) a) Déterminer des réels a, b, c tels que, pour tout $x\neq-1$, $f_m(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$.

b) En déduire que Γ_m admet une asymptote oblique Δ_m dont on donnera une équation.

2) Dresser le tableau de variation de f_m suivant les valeurs de m.

3) a) Montrer que f_m admet deux extremums.

b) Déterminer les coordonnées des points de Γ_m correspondants, puis leur ensemble lorsque m décrit $I\!R^*$.

Partie B. Dans cette partie, $m=3$; on note $f=f_3$ et $\Gamma=\Gamma_3$.

1) Étudier les variations de f.

2) On considère le repère $R'=(\Omega;\vec{u},\vec{j})$ avec $\overrightarrow{O\Omega}=-\vec{i}$ et $\vec{u}=3\vec{i}+\vec{j}$.

a) Montrer que si M a pour coordonnées $(x;y)$ dans l'ancien repère et $(X;Y)$ dans R', alors $x=3X-1$ et $y=X+Y$.

b) Déterminer une équation de Γ dans R' et en déduire la nature de Γ.

3) a) Montrer que Γ admet deux tangentes T et T' de coefficient directeur -1, et donner leurs équations.

b) Tracer Γ, T et T'.

4) Soit g la fonction définie par $g(x)=\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{x}$. Montrer que la courbe de g se déduit de Γ par une translation que l'on précisera.

Exercice 10

Partie A. Déterminer les réels a, b, c, d pour que la courbe de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{cx^2+dx-2}$ admette la droite d'équation $x=2$ pour asymptote, n'admette pas d'asymptote horizontale, et passe par le point $A(1;0)$ avec une tangente de coefficient directeur -3.

Partie B. Soit g la fonction définie sur $IR\setminus\{2\}$ par $g(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-2}$ et ζ_g sa courbe.

1) a) Dresser le tableau de variation de g.

b) Déterminer des réels a', b', c' tels que $g(x)=a'x+b'+\dfrac{c'}{x-2}$.

c) En déduire une asymptote oblique Δ à ζ_g.

d) Tracer ζ_g.

2) a) Montrer que le point $I(2;5)$ est centre de symétrie de ζ_g.

b) Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de Δ et $\vec{v}$ un vecteur directeur de l'autre asymptote. Déterminer une équation de ζ_g dans le repère $(I;\vec{u},\vec{v})$.

3) Déterminer, suivant les valeurs du réel m, le nombre de solutions de l'équation $x^2+(1-m)x-2(1-m)=0$ vérifiant $-2\le x\le 4$.

4) Construire la courbe de la fonction h définie par $h(x)=\dfrac{x^2+|x|-2}{|x|-2}$.

Partie C. Pour tout réel $m\neq 0$, on considère la fonction f_m définie par $f_m(x)=\dfrac{x^2+mx-2}{mx-2}$.

1) Montrer que toutes les courbes de ces fonctions passent par un unique point fixe A.

2) Montrer que la droite $\Delta_m: y=\dfrac{1}{m}x+1+\dfrac{2}{m^2}$ est asymptote à la courbe de f_m.

3) Étudier les variations de f_m suivant les valeurs de m.

4) a) Déterminer le centre de symétrie I_m de la courbe de f_m.

b) Déterminer l'ensemble des points I_m lorsque m décrit IR^*.

4 Études avec fonction auxiliaire

Exercice 11

Partie A. Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=x^2(x+2)$.

1) Étudier les variations de g.

2) Montrer que l'équation $g(x)=4$ admet une unique solution a dans $[0;+\infty[$; en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

3) Résoudre l'inéquation $g(x)>4$.

Partie B. Soit f la fonction définie sur IR^* par $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+2}}{x}+x$.

1) Étudier la parité de f.

2) Calculer les limites de f en 0^+, en $+\infty$, en 0^- et en $-\infty$.

3) Montrer que la droite d'équation $y=x+1$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$; en déduire une asymptote en $-\infty$.

4) a) Montrer que, pour tout $x\neq 0$, $f'(x)=\dfrac{\sqrt{g(x^2)}-2}{x^2\sqrt{x^2+2}}$.

b) En déduire que $f'(x)>0$ pour tout $x\in]\sqrt{a};+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

5) Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $\sqrt{2}$.

6) Tracer la courbe de f.

Exercice 12

Partie A. Soit g la fonction définie sur IR par $g(x)=x^4-4x-3$.

1) Étudier les variations de g.

2) a) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet exactement deux solutions α et β telles que $\alpha<0<\beta$.

b) Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de chacune d'elles.

c) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B. Soit f la fonction définie sur $IR\setminus\{1\}$ par $f(x)=\dfrac{x^4+1}{x^3-1}$.

1) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2) a) Déterminer des réels a, b, c, d, e tels que $f(x)=ax+b+\dfrac{cx^2+dx+e}{x^3-1}$.

b) En déduire une asymptote oblique à la courbe de f.

c) Étudier la position de la courbe par rapport à la droite d'équation $y=x$.

3) a) Montrer que $f'(x)=\dfrac{x^2g(x)}{(x^3-1)^2}$.

b) En déduire les variations de f.

4) Donner un encadrement de $f(\alpha)$ et de $f(\beta)$.

5) Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse -1.

6) Dresser le tableau de variation complet de f et tracer sa courbe.

Auto-évaluation : vrai ou faux ?

Affirmation	Vrai	Faux
1. Si $f(4-x)=f(x)$, la droite $x=2$ est axe de symétrie.	☐	☐
2. Une fonction impaire définie en 0 vérifie $f(0)=0$.	☐	☐
3. Si $\dfrac{f(x)}{x}\to+\infty$ en $+\infty$, la courbe a une asymptote verticale.	☐	☐
4. Si $f(x)-2x\to 3$ en $+\infty$, la droite $y=2x+3$ est asymptote.	☐	☐