COURS • 3ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 13 — Étude des fonctions

Sommaire

- 1. Parité, périodicité
- 2. Axe et centre de symétrie d'une courbe
- 3. Réduction du domaine d'étude
- 4. Branches infinies : asymptotes et branches paraboliques
- 5. Plan d'étude d'une fonction
- 6. Exemple complet : une fonction rationnelle
- 7. Position relative de deux courbes — lecture graphique
- 8. Fiche mémo

L'essentiel à retenir — Objectifs du programme officiel

- Exploiter les symétries et la périodicité pour réduire le domaine d'étude.
- Déterminer les branches infinies d'une courbe (asymptotes, branches paraboliques).
- Mener l'étude complète d'une fonction polynôme, rationnelle ou irrationnelle simple et tracer sa courbe.

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$; f est définie sur D et C_f est sa courbe.

1 Parité, périodicité

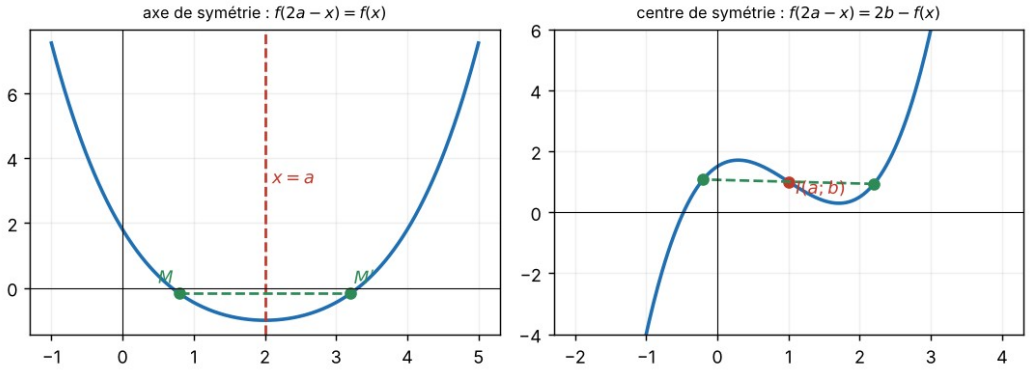
Définition

- f est **paire** si pour tout $x\in D$: $-x\in D$ et $f(-x)=f(x)$; l'axe des ordonnées est alors axe de symétrie de C_f.
- f est **impaire** si pour tout $x\in D$: $-x\in D$ et $f(-x)=-f(x)$; l'origine O est alors centre de symétrie de C_f.
- f est **périodique** s'il existe $t\neq 0$ tel que pour tout $x\in D$: $x+t\in D$, $x-t\in D$ et $f(x+t)=f(x)$. Le plus petit tel $t>0$, s'il existe, est **la période** T de f.

2 Axe et centre de symétrie d'une courbe

Théorème

- La droite $\Delta : x=a$ est **axe de symétrie** de C_f si et seulement si pour tout $x\in D$: $2a-x\in D$ et $f(2a-x)=f(x)$.
- Le point $I(a;b)$ est **centre de symétrie** de C_f si et seulement si pour tout $x\in D$: $2a-x\in D$ et $f(2a-x)=2b-f(x)$.



◆ **Démonstration**

Le symétrique de $M(x;f(x))$ par rapport à $\Delta: x=a$ est $M'(2a-x;f(x))$; par rapport à $I(a;b)$, c'est $M'(2a-x;2b-f(x))$. La courbe est symétrique si et seulement si M' appartient à C_f pour tout M de C_f.

◆ **Exemple corrigé**

Montrer que $I(1;1)$ est centre de symétrie de la courbe de $f(x)=x+\dfrac{1}{x-1}$.

Solution. $D=IR\setminus\{1\}$: si $x\neq 1$ alors $2-x\neq 1$. Et $f(2-x)=2-x+\dfrac{1}{1-x}=2-\left(x+\dfrac{1}{x-1}\right)=2-f(x)$.

3 Réduction du domaine d'étude

◆ **Méthode**

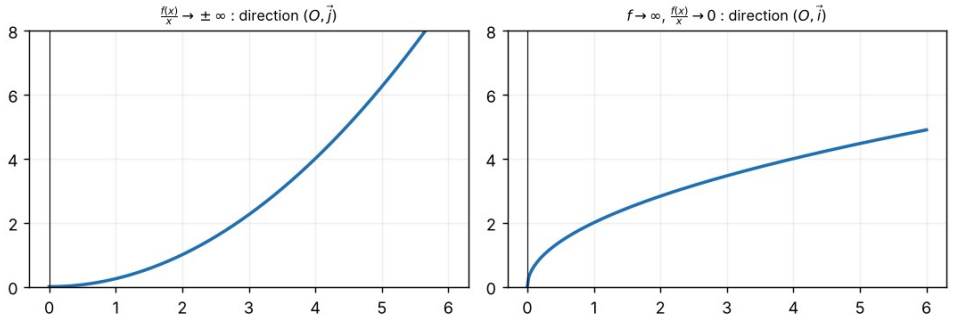
- f paire ou impaire : on l'étudie sur $D\cap[0;+\infty[$, puis on complète par symétrie.
- C_f admet l'axe $x=a$ ou le centre $I(a;b)$: on l'étudie sur $D\cap[a;+\infty[$.
- f est T-périodique : on l'étudie sur $D\cap[\alpha;\alpha+T[$ (pour un réel α bien choisi), puis on complète par les translations de vecteurs $kT\vec{i}$, $k\in\mathbb{Z}$.

◆ **Exemple corrigé**

f définie sur IR, paire et 2-périodique : il suffit de l'étudier sur $[0;1]$ (sur $[-1;1]$ par périodicité, puis sur $[0;1]$ par parité).

4 Branches infinies : asymptotes et branches paraboliques

Si...	Alors C_f admet...
$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ (ou à droite / à gauche)	l'asymptote verticale $x = x_0$
$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$	l'asymptote horizontale $y = b$
$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$	l'asymptote oblique $y = ax + b$
$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$	une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$
$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$	une branche parabolique de direction $(O, \vec{i})$
$\dfrac{f(x)}{x} \to a \neq 0$ et $f(x) - ax \to \pm\infty$	une branche parabolique de direction la droite $y = ax$



◆ **Propriété — cas usuels**

- Fonction polynôme de degré $n \geq 2$: branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$ en $\pm\infty$.
- $x \mapsto \sqrt{x}$: branche parabolique de direction $(O, \vec{i})$ en $+\infty$.

5 Plan d'étude d'une fonction

◆ **Méthode — les étapes**

1) Ensemble de définition ; réduction éventuelle (parité, périodicité, symétries).
2) Limites aux bornes du domaine ; asymptotes et branches infinies.
3) Continuité, dérivabilité (étudier les points particuliers : valeur absolue, racine).
4) Calcul de $f'(x)$, étude de son signe, tableau de variation.
5) Éléments utiles : intersections avec les axes, tangentes remarquables, position par rapport aux asymptotes.
6) Tracé de la courbe : asymptotes, points et tangentes remarquables, puis la courbe.

6 Exemple complet : une fonction rationnelle

◆ **Exemple corrigé** — $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$

1) Ensemble de définition : $D=IR\setminus\{1\}$, et $f(x)=x+\dfrac{1}{x-1}$.

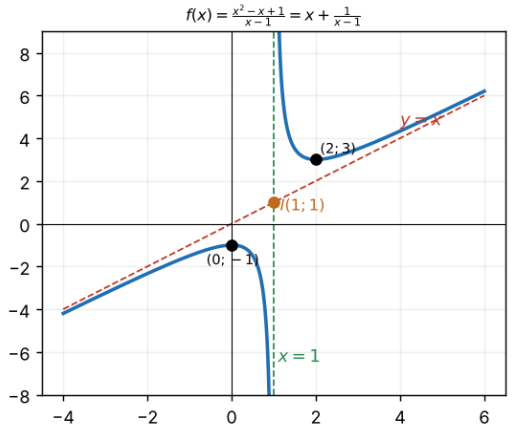
2) Limites : $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$; $f(x)-x=\dfrac{1}{x-1}$ tend vers 0 : $y=x$ est asymptote oblique. En 1 : la limite à droite est $+\infty$ et la limite à gauche $-\infty$: $x=1$ est asymptote verticale.

3) Position : $f(x)-x$ est du signe de $x-1$: C_f est au-dessus de l'asymptote oblique pour $x>1$ et au-dessous pour $x<1$.

4) Dérivée : $f'(x)=1-\dfrac{1}{(x-1)^2}=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$.

5) Symétrie : $I(1;1)$ est centre de symétrie (paragraphe 2).

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	3	↗	$+\infty$



7 Position relative de deux courbes — lecture graphique

◆ **Méthode**

- La position de C_f par rapport à C_g est donnée par le signe de $f(x)-g(x)$.
- Les solutions de $f(x)=g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection ; celles de $f(x)=m$ sont les abscisses des points d'intersection de C_f avec la droite $y=m$ (discussion graphique selon m).

◆ **Exemple corrigé**

Sur la courbe précédente, l'équation $f(x)=m$ admet deux solutions si $m<-1$ ou $m>3$, une seule si $m=-1$ ou $m=3$, aucune si $-1<m<3$.

Fiche mémo

Notion	À retenir
Axe $x=a$	$f(2a-x)=f(x)$
Centre $I(a;b)$	$f(2a-x)=2b-f(x)$
Réduction	parité : $[0;+\infty[$; période T : intervalle de longueur T
Asymptotes	$x=x_0$; $y=b$; $y=ax+b$
Branche parabolique	$\frac{f(x)}{x}\to\infty$: direction $(O,\vec{j})$; $\frac{f(x)}{x}\to 0$: direction $(O,\vec{i})$
Position	signe de $f(x)-g(x)$
Plan d'étude	domaine, limites, dérivée, variations, branches infinies, tracé