EXERCICES • 3ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 12 — Rotations du plan

1 Rotations et configurations

Exercice 1

$ABCD$ est un carré direct. Les triangles ABA' et DCC' sont équilatéraux et extérieurs au carré ; les triangles ADD' et BCB' sont équilatéraux et intérieurs au carré. R et R' sont les rotations de centre A et d'angles $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$.

1) Déterminer $R(A')$, $R(D')$, $R'(B)$ et $R'(D)$.

2) Montrer que $A'D'=B'C'$ et que $(\overrightarrow{A'D'},\overrightarrow{B'C'})\equiv 0\,[2\pi]$.

3) En déduire que $A'B'C'D'$ est un parallélogramme. 4) Prouver que c'est un losange.

Exercice 2

ABC est un triangle direct d'orthocentre H ; S est la symétrie de centre A, R et R' les rotations de centre A et d'angles $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$.

1) Construire $D=R(B)$, $E=R'(C)$, $F=S(E)$.

2) Montrer que $R(C)=F$ et que $(BC)\perp(DF)$.

3) Que représente (AH) pour le triangle AED ?

Exercice 3

ABC est un triangle non isocèle tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\equiv\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$. On place P sur la demi-droite $[BA)$, $P\neq B$, et Q sur $[CA)$ tel que $CQ=BP$.

1) Construire le centre O de la rotation r d'angle $\frac{\pi}{3}$ qui transforme B en C.

2) Montrer que $r(P)=Q$; nature du triangle OPQ ?

3) Construire P et Q tels que $BP=CQ=PQ$.

Exercice 4

Soit $ABCD$ un carré direct de centre O. On considère deux points $I\in[AD]$ et $J\in[AB]$ tels que $AI=BJ$; les droites (BI) et (DJ) se coupent en H.

1) Montrer que $R(O;\frac{\pi}{2})(I)=J$.

2) a) Montrer que $(CI)\perp(DJ)$.

b) Montrer que H est l'orthocentre du triangle CIJ.

Exercice 5

Soit $ABCD$ un carré direct de centre O et r la rotation de centre O qui transforme A en B.

1) Déterminer l'angle de r.

2) Déterminer $r(B)$.

3) Soit $E \in [AB\backslash)$ et $F \in [BC\backslash)$ tels que $AE = BF$. Déterminer $r(E)$.

4) Les droites (AF) et (EC) se coupent en H. Que représente H pour le triangle DEF ?

Exercice 6

$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ sont trois droites strictement parallèles. Construire un triangle équilatéral direct ABC tel que $A \in \Delta_1, B \in \Delta_2, C \in \Delta_3$.

2 Cercles et lieux

Exercice 7

Deux cercles isométriques ζ et ζ' de centres O et O' se coupent en A et B. Soit r la rotation de centre A telle que $r(O) = O'$, $M \in \zeta$ et $M' = r(M)$. Montrer que B, M et M' sont alignés.

Exercice 8

$ABCD$ est un carré direct et M un point de $[BD]$ distinct de B et D ; P et Q sont les projetés orthogonaux de M sur (AB) et (AD).

1) Soit I le centre du rectangle $APMQ$: ensemble des points I lorsque M décrit $[BD]$?

2) Soit r la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ telle que $r(A) = B$: déterminer son centre ω et en déduire que la médiatrice de $[PQ]$ passe par ω.

Exercice 9

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O tel que $AB \neq AD$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ et $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. E est tel que CED soit équilatéral direct.

1) Montrer qu'il existe une rotation r telle que $r(A) = E$ et $r(B) = D$; préciser son angle θ et construire son centre I.

2) La droite (EC) coupe (AB) en F.

a) Montrer que $D \in [AE]$, que AFE est équilatéral direct et que $r(F) = A$.

b) En déduire que I est le centre du cercle circonscrit à AEF.

3) Soit r' la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{3}$. Trouver $r'(D)$ et $r'(F)$; en déduire que (FD) et (BE) se coupent en un point J et déterminer $(\overrightarrow{JD}, \overrightarrow{JB})$.

4) Soit ζ le cercle de centre ω circonscrit à ABD.

a) Montrer que ζ passe par I et J.

b) Montrer que I, O, ω sont alignés.

Exercice 10

ABC est rectangle isocèle en A avec $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$; I est le milieu de $[BC]$, Δ la perpendiculaire à (BC) en C et $K=\Delta\cap(AB)$. r est la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

1) Faire une figure.

2) a) Déterminer $r(B)$, $r((AC))$, $r((BC))$.

b) En déduire $r(C)$ et $r(I)$.

3) Soit ζ le cercle circonscrit à ABC.

a) Déterminer $\zeta'=r(\zeta)$ puis $\zeta\cap\zeta'$.

b) Soit M tel que $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})\equiv -\frac{5\pi}{4}[2\pi]$ et $M'=r(M)$: sur quel ensemble varie M' ?

c) Montrer que $(BM)\perp(CM')$ et que $IM=JM'$ avec $J=r(I)$.

Exercice 11

Partie I. $M'(x';y')$ est l'image de $M(x;y)$ par la rotation r de centre $\omega(a;b)$ et d'angle α. On pose $\ell=\omega M$ et $(\vec{i},\overrightarrow{\omega M})\equiv\beta$.

1) Montrer que $x-a=\ell\cos\beta$ et $y-b=\ell\sin\beta$.

2) Montrer que $x'-a=\ell\cos(\alpha+\beta)$ et $y'-b=\ell\sin(\alpha+\beta)$.

3) En déduire l'expression analytique de r.

Partie II. R_n est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2^n}$. Soit $M_0(a_0;b_0)$ et pour $n\geq 1$, $M_n(a_n;b_n)=R_n(M_{n-1})$.

1) Montrer que M_n est l'image de M_0 par la rotation de centre O et d'angle $\pi(1-\frac{1}{2^n})$.

2) En déduire a_n et b_n.

3) Calculer $\lim_{n\to+\infty}a_n$ et $\lim_{n\to+\infty}b_n$.

Auto-évaluation : vrai ou faux ?

Affirmation	Vrai	Faux
1. Une rotation d'angle π est une symétrie centrale.	☐	☐
2. Une rotation conserve les angles orientés.	☐	☐
3. Toute rotation différente de l'identité admet au moins deux points fixes.	☐	☐
4. Si $R(A)=A'$, le centre de R est sur la médiatrice de $[AA']$.	☐	☐