COURS • 3ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 12 — Rotations du plan

Sommaire

- 1. Définition d'une rotation
- 2. Cas particuliers — rotation réciproque
- 3. Propriétés : conservation
- 4. Images des figures usuelles
- 5. Isométries du plan
- 6. Détermination d'une rotation
- 7. Composée de deux rotations de même centre
- 8. Expression complexe d'une rotation
- 9. Fiche mémo

L'essentiel à retenir — Objectifs du programme officiel

- Construire l'image d'un point, d'une figure par une rotation.
- Utiliser les propriétés des rotations pour démontrer (alignement, parallélisme, égalités de distances, cocyclicité).
- Déterminer une rotation (centre et angle) ; résoudre des problèmes de lieux et de construction.

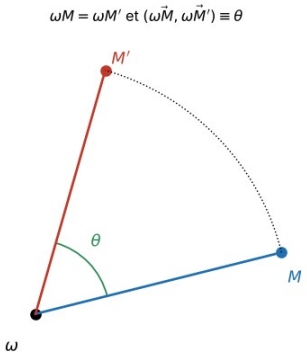
1 Définition d'une rotation

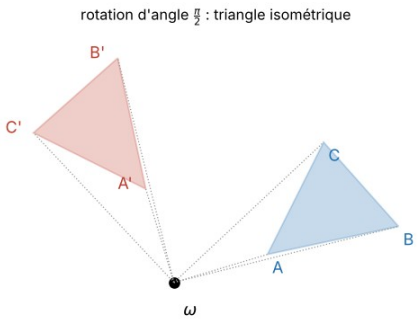
Le plan $\wp$ est orienté dans le sens direct.

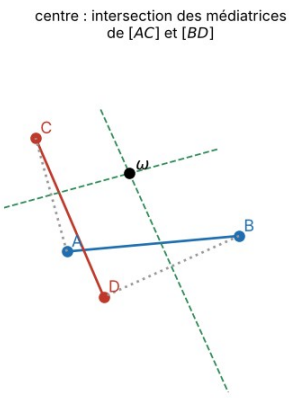
Définition

Soit ω un point et θ un réel. La **rotation de centre ω et d'angle θ**, notée $R(\omega, \theta)$, est l'application du plan dans lui-même qui laisse ω fixe et qui, à tout point $M \neq \omega$, associe le point M' tel que :

$\omega M' = \omega M$ et $(\overrightarrow{\omega M}, \overrightarrow{\omega M'}) \equiv \theta \ [2\pi]$.







2 Cas particuliers — rotation réciproque

◆ **Propriété**

- Si $\theta \equiv 0 \ [2\pi]$, $R(\omega,\theta)$ est l'identité du plan.
- Si $\theta \equiv \pi \ [2\pi]$, $R(\omega,\theta)$ est la symétrie centrale de centre ω.
- Si la mesure principale de θ est dans $]0;\pi[$, on parle de rotation de sens direct ; dans $]-\pi;0[$, de sens indirect.
- Le seul point invariant d'une rotation d'angle $\theta \not\equiv 0 \ [2\pi]$ est son centre.

◆ **Théorème — rotation réciproque**

$R(\omega,\theta)$ est une bijection du plan ; sa réciproque est $R(\omega,-\theta)$: $M' = R(\omega,\theta)(M) \Leftrightarrow M = R(\omega,-\theta)(M')$.

3 Propriétés : conservation

Soit $R = R(\omega,\theta)$, et A, B, C, D des points d'images A', B', C', D' ($A \neq B$, $C \neq D$).

◆ **Théorème**

- R conserve les **distances** : $A'B' = AB$, et le **produit scalaire** : $\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.
- $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv \theta \ [2\pi]$: tout vecteur tourne de l'angle θ.
- R conserve les **angles orientés** : $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \ [2\pi]$.
- Si $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{CD}$, alors $\overrightarrow{A'B'} = x\overrightarrow{C'D'}$: R conserve la colinéarité, les milieux et les barycentres.

◆ **Démonstration — conservation des distances**

Par Chasles, $(\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega B}) \equiv (\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega A'}) + (\overrightarrow{\omega A'}, \overrightarrow{\omega B'}) + (\overrightarrow{\omega B'}, \overrightarrow{\omega B}) \equiv \theta + (\overrightarrow{\omega A'}, \overrightarrow{\omega B'}) - \theta$, donc $(\overrightarrow{\omega A'}, \overrightarrow{\omega B'}) \equiv (\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega B})$. Avec $\omega A' = \omega A$ et $\omega B' = \omega B$, la relation d'Al-Kashi dans les triangles ωAB et $\omega A'B'$ donne $A'B' = AB$ (les cas $A = \omega$ ou $B = \omega$ sont immédiats).

4 Images des figures usuelles

Figure	Image par une rotation
droite (AB)	droite $(A'B')$; l'angle de (AB) à $(A'B')$ est θ modulo π
segment $[AB]$	segment $[A'B']$ de même longueur
cercle de centre I et de rayon ρ	cercle de centre $I' = R(I)$ et de même rayon ρ
droites parallèles / perpendiculaires	droites parallèles / perpendiculaires
droite tangente à un cercle	droite tangente au cercle image (conservation du contact)

◆ **Exemple corrigé — triangles équilatéraux**

ABC est un triangle quelconque. On construit à l'extérieur les triangles équilatéraux ABD et ACE.

Montrer que $DC = BE$ et que (DC, BE) forment un angle de $\frac{\pi}{3}$.

Solution. Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ (orientation choisie de sorte que $R(D) = B$). Alors $R(C) = E$. L'image du segment $[DC]$ est $[BE]$: $DC = BE$ et $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BE}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

5 Isométries du plan

◆ **Définition**

Une application f du plan dans lui-même est une **isométrie** si, pour tous points M, N d'images M', N' : $M'N' = MN$.

◆ **Propriété**

Les symétries orthogonales, les symétries centrales, les translations et les rotations sont des isométries. Les translations et les rotations conservent de plus les angles orientés (déplacements) ; les symétries orthogonales les changent en leurs opposés.

6 Détermination d'une rotation

◆ **Théorème**

- Une rotation est déterminée par son centre et son angle, ou par son angle et un point et son image.
- Soit A, B, C, D tels que $A \neq B$, $AB = CD$ et $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$. Il existe une **unique** rotation R telle que $R(A) = C$ et $R(B) = D$; son angle est $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ et son centre appartient aux médiatrices de $[AC]$ et de $[BD]$.

◆ **Méthode — trouver le centre**

- Si les médiatrices de $[AC]$ et de $[BD]$ sont sécantes, le centre est leur point d'intersection.
- Sinon (elles sont confondues), on utilise le cercle des points ω tels que $(\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega C}) \equiv \theta$, ou l'expression complexe.

7 Composée de deux rotations de même centre

◆ **Théorème**

$R(\omega, \theta) \circ R(\omega, \alpha) = R(\omega, \theta + \alpha)$. En particulier $R(\omega, \theta) \circ R(\omega, -\theta)$ est l'identité.

8 Expression complexe d'une rotation

◆ Théorème

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct. Soit ω d'affixe z_ω. Le point $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par $R(\omega,\theta)$ si et seulement si :

$z'-z_\omega=(\cos\theta+i\sin\theta)(z-z_\omega)$.

◆ Démonstration

Pour $M\neq\omega$: $\dfrac{z'-z_\omega}{z-z_\omega}$ a pour module $\dfrac{\omega M'}{\omega M}=1$ et pour argument $(\overrightarrow{\omega M},\overrightarrow{\omega M'})\equiv\theta$; c'est donc $\cos\theta+i\sin\theta$. Le cas $M=\omega$ est immédiat.

◆ Exemple corrigé

Déterminer l'image de $A(2+i)$ par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, puis par la rotation de centre $\omega(1)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

Solution.

- $z'=i(2+i)=-1+2i$.
- $z'-1=(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2})(1+i)=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$, donc $z'=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

★ Fiche mémo

Notion	À retenir
Définition	$\omega M'=\omega M$ et $(\overrightarrow{\omega M},\overrightarrow{\omega M'})\equiv\theta\ [2\pi]$
Cas particuliers	$\theta\equiv 0$: identité ; $\theta\equiv\pi$: symétrie centrale
Réciproque	$R(\omega,\theta)^{-1}=R(\omega,-\theta)$
Conservation	distances, produit scalaire, angles orientés, milieux, parallélisme, contact
Vecteurs	$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'})\equiv\theta\ [2\pi]$
Détermination	$AB=CD$: angle $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})$, centre sur les médiatrices de $[AC]$ et $[BD]$
Complexes	$z'-z_\omega=(\cos\theta+i\sin\theta)(z-z_\omega)$