EXERCICES • 3ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 11 — Nombres complexes

1 Forme algébrique, conjugué, module

Exercice 1

1) Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants : $z_0=3i+\frac{1}{i}-2$, $z_1=(1+i)^2$, $z_2=(1-2i)^2$, $z_3=\frac{1}{3+2i}$, $z_4=\frac{1+2i}{2-3i}$, $z_5=i^n$ $(n\in\mathbb{N})$.

2) Calculer le module de chacun des nombres complexes suivants : $3i-2$, $(2+i)^2$, $\frac{1}{5+2i}$, $\frac{2-i}{i+3}$, $\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2$.

Exercice 2

Soit $(a\,;b)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*$, $z_1=\frac{a+ib}{a-ib}$ et $z_2=\frac{a-ib}{a+ib}$. Montrer que z_1+z_2 est réel et que z_1-z_2 est imaginaire pur.

Exercice 3

Soient a, b, c trois nombres complexes de module 1 tels que $a+b+c=1$. Calculer $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

Exercice 4

Soit $z=x+iy$ (x, y réels). Déterminer l'ensemble E des points $M(z)$ tels que z^2 soit réel, l'ensemble F tels que $|z|=1$, l'ensemble H tels que $\mathrm{Im}(z^2)=\mathrm{Im}(z)$.

Exercice 5

Soit $Z=\frac{z+1}{z-i}$ avec $z=x+iy$, $z\neq i$.

1) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|Z|=1$.

2) En déduire l'ensemble des points $M(z)$ tels que $\left|\frac{\overline{z}+1}{z-i}\right|=1$.

3) Exprimer $\mathrm{Re}(Z)$ et $\mathrm{Im}(Z)$ en fonction de x et y.

4) Déterminer l'ensemble des points M tels que Z soit réel.

5) Déterminer l'ensemble des points M tels que Z soit imaginaire pur.

Exercice 6

Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs non nuls d'affixes α et β.

1) Montrer que $\alpha\overline{\beta}=\vec{a}\cdot\vec{b}-i\det(\vec{a},\vec{b})$.

2) En déduire : $\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\alpha\overline{\beta}\in\mathbb{R}$ et $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\alpha\overline{\beta}\in i\mathbb{R}$.

3) Soient $A(1+i)$, $B(1)$, $M(z)$. Déterminer l'ensemble des points M tels que :

a) ABM soit rectangle en M ;

b) A, B, M soient alignés.

Exercice 7

Partie A. Pour tout nombre complexe z, on pose $f(z)=z^2+z+1$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $s^2=2$ et $t^2=-3$.

2) Vérifier que $4f(z)=(2z+1)^2+3$.

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z)=0$.

4) Montrer que si $f(z_0)=0$ alors $f(\overline{z_0})=0$.

5) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit réel.

Partie B.

1) Résoudre $z^3=1$; on note j la racine de partie imaginaire positive.

2) Écrire les racines sous forme trigonométrique.

3) Calculer j^2 et $1+j+j^2$.

4) Montrer que $(a+b+c)(a+bj+cj^2)(a+cj+bj^2)=a^3+b^3+c^3-3abc$.

5) Montrer que les relations $a+bj+cj^2=0$, $b+cj+aj^2=0$, $c+aj+bj^2=0$ sont équivalentes et caractérisent un triangle ABC équilatéral.

Exercice 8

Soient $A(3)$, $B(-3)$ et $M(z)$ tels que $\dfrac{MB}{MA}=2$ $(*)$.

1) Montrer que $(*)$ équivaut à $(z-5)(\overline{z}-5)=16$.

2) En déduire l'ensemble des points M.

2 Arguments

Exercice 9

Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe $z\neq 0$ tels que : $\arg(z)\equiv 0\,[2\pi]$; $\arg(z)\equiv \pi\,[2\pi]$; $\arg(z)\equiv \dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$; $\arg(z)\equiv -\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$; $\arg(z)\equiv \dfrac{\pi}{3}\,[2\pi]$; $\arg(z)\equiv -\dfrac{2\pi}{3}\,[2\pi]$; $\arg(z)\equiv \dfrac{\pi}{3}\,[\pi]$.

Exercice 10

Écrire sous forme trigonométrique : $1+i\sqrt{3}$, $1-i\sqrt{3}$, $-1+i\sqrt{3}$, $-1-i\sqrt{3}$, $1+i$, $\dfrac{1}{1+i}$, $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$, $(1-i\sqrt{3})^{2009}$, $\cos\dfrac{\pi}{11}-i\sin\dfrac{\pi}{11}$, $\sin\dfrac{\pi}{11}+i\cos\dfrac{\pi}{11}$, $1-i\tan\dfrac{\pi}{11}$, $1+\cos\dfrac{\pi}{11}+i\sin\dfrac{\pi}{11}$.

3 Valeurs exactes

Exercice 11

Soit $z=1+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1)$ et $z'=(1+i)z$.

1) Écrire z' sous forme algébrique puis trigonométrique.

2) En déduire la forme trigonométrique de z.

3) En déduire $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\cos\frac{\pi}{12}$.

Exercice 12

Soit $z=\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$.

1) Écrire z sous forme trigonométrique.

2) Écrire z sous forme algébrique.

3) En déduire $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\cos\frac{\pi}{12}$.

Exercice 13

Soit $\varphi\in[0;\pi[$. Écrire sous forme trigonométrique : $z_1=\sin\varphi+i\cos\varphi$, $z_2=1+\cos\varphi-i\sin\varphi$, $z_3=\frac{1-i}{\sin\varphi-i\cos\varphi}$.

Exercice 14

On donne $a=-\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

1) Exprimer a^2 sous forme algébrique, puis trigonométrique.

2) En déduire a sous forme trigonométrique, puis $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

3) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que a^2z soit réel.

4) Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $a^n=(-1)^n|a|^n\left(\cos\frac{n\pi}{8}-i\sin\frac{n\pi}{8}\right)$.

Exercice 15

Soit $P(z)=z^3+az^2+bz+c$ (a, b, c complexes), de racines z_1, z_2, z_3.

1) Montrer que $a=-(z_1+z_2+z_3)$, $b=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$, $c=-z_1z_2z_3$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}^3$: $x+y+z=1$, $xy+yz+zx=1$, $xyz=1$.

3) Déterminer les nombres complexes de module inférieur ou égal à 1 vérifiant $xyz=x+y+z=1$.

Auto-évaluation : vrai ou faux ?

Affirmation	Vrai	Faux
1. $\lvert 3+4i\rvert=5$.	☐	☐
2. $\overline{z}=z$ équivaut à z imaginaire pur.	☐	☐
3. Un argument de $-2i$ est $-\frac{\pi}{2}$.	☐	☐
4. Si $\lvert z\rvert=1$ alors $\frac{1}{z}=\overline{z}$.	☐	☐