COURS • 3ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 11 — Nombres complexes

◆ **Sommaire**

- 1. L'ensemble $\mathbb{C}$ — forme algébrique
- 2. Représentation géométrique
- 3. Conjugué d'un nombre complexe
- 4. Module d'un nombre complexe
- 5. Argument — forme trigonométrique
- 6. Opérations sous forme trigonométrique — formule de Moivre
- 7. Équations du second degré à coefficients réels
- 8. Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir — Objectifs du programme officiel**

- Calculer avec les nombres complexes sous forme algébrique ; utiliser le conjugué et le module.
- Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique et inversement.
- Interpréter géométriquement module et argument ; déterminer des ensembles de points.
- Résoudre dans $\mathbb{C}$ une équation du second degré à coefficients réels.

1 L'ensemble $\mathbb{C}$ — forme algébrique

◆ **Définition**

Il existe un ensemble $\mathbb{C}$, contenant IR, muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de IR et ont les mêmes règles de calcul, et contenant un élément i tel que $i^2=-1$.

Tout nombre complexe z s'écrit de manière **unique** $z=a+ib$ avec a, b réels : c'est la **forme algébrique** de z. $a=\mathrm{Re}(z)$ est la **partie réelle**, $b=\mathrm{Im}(z)$ la **partie imaginaire**.

◆ **Propriété**

- $a+ib=a'+ib' \Leftrightarrow a=a'$ et $b=b'$; en particulier $z=0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=\mathrm{Im}(z)=0$.
- z est **réel** $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(z)=0$; z est **imaginaire pur** $\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=0$.
- Puissances de i : $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$; plus généralement $i^{4k}=1$.

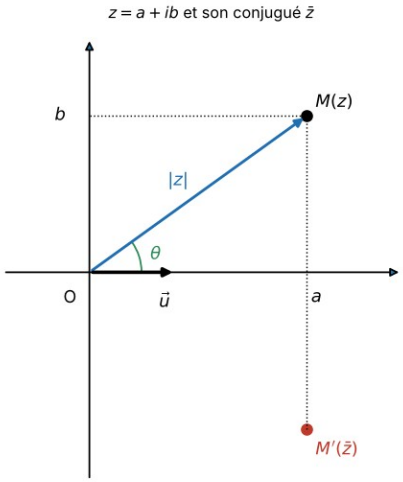
◆ **Exemple corrigé**

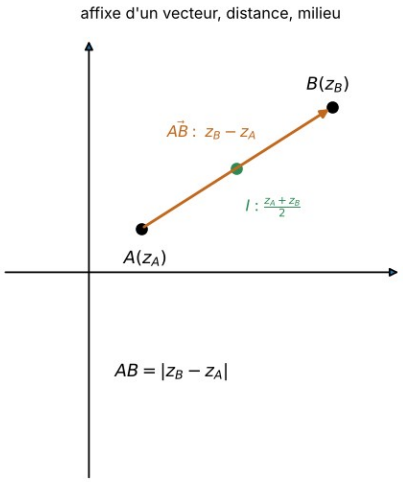
- $(2+3i)(1-i)=2-2i+3i-3i^2=5+i$.
- $(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$; donc $(1+i)^4=(2i)^2=-4$.

2 Représentation géométrique

◆ Définition

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Au nombre $z=a+ib$ on associe le point $M(a;b)$ et le vecteur $\vec{w}(a;b)$: z est l'**affixe** de M et de $\vec{w}$.





◆ Propriété

- Affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$: z_B-z_A ; affixe de $a\,\vec{w}+b\,\vec{w'}$: $a\,z_w+b\,z_{w'}$ (a, b réels).
- Milieu I de $[AB]$: $z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}$.

3 Conjugué d'un nombre complexe

◆ Définition

Le **conjugué** de $z=a+ib$ est $\overline{z}=a-ib$. Le point d'affixe $\overline{z}$ est le symétrique de $M(z)$ par rapport à l'axe $(O,\vec{u})$.

◆ Propriété — pour tous complexes z, z' et tout entier $n\geq 1$

- $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$; $\overline{zz'}=\overline{z}\times\overline{z'}$; $\overline{z^n}=(\overline{z})^n$; $\dfrac{\overline{z}}{z'}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ $(z'\neq 0)$.
- $\mathrm{Re}(z)=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$; $\mathrm{Im}(z)=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$.
- $z\in IR \Leftrightarrow \overline{z}=z$; $z\in iIR \Leftrightarrow \overline{z}=-z$.
- $z\,\overline{z}=a^2+b^2$: c'est un réel positif.

◆ Méthode — écrire un quotient sous forme algébrique

On multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Exemple : $\dfrac{3+i}{1-2i}=\dfrac{(3+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\dfrac{3+6i+i+2i^2}{5}=\dfrac{1+7i}{5}=\dfrac{1}{5}+\dfrac{7}{5}i.$

4 Module d'un nombre complexe

◆ Définition

Le **module** de $z=a+ib$ est le réel positif $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{z\,\overline{z}}$. Si M a pour affixe z : $|z|=OM$.

◆ Propriété

- $|z|=0 \Leftrightarrow z=0$; $|\overline{z}|=|-z|=|z|$; $z\,\overline{z}=|z|^2$.
- $|zz'|=|z||z'|$; $|z^n|=|z|^n$; $\left|\dfrac{z}{z'}\right|=\dfrac{|z|}{|z'|}$; $\dfrac{1}{z}=\dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ $(z\neq 0)$.
- Inégalité triangulaire : $|z+z'|\leq|z|+|z'|$.
- Distance : $AB=|z_B-z_A|$.

◆ Démonstration — module d'un produit

$|zz'|^2=zz'\,\overline{zz'}=z\,\overline{z}\times z'\,\overline{z'}=|z|^2|z'|^2$, et les modules sont positifs.

◆ Exemple corrigé — ensembles de points

- $|z-2i|=3 \Leftrightarrow AM=3$ avec $A(2i)$: cercle de centre A et de rayon 3.
- $|z-1|=|z+i| \Leftrightarrow BM=CM$ avec $B(1)$, $C(-i)$: médiatrice de $[BC]$.

5 Argument — forme trigonométrique

◆ Définition

Soit $z\neq 0$ d'image M. On appelle **argument** de z toute mesure θ de l'angle orienté $(\vec{u},\overrightarrow{OM})$; on note $\arg(z)\equiv\theta\ \ [2\pi]$.

Alors $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ avec $r=|z|$: c'est une **forme trigonométrique** de z, notée aussi $z=[r,\theta]$.

Forme algébrique → trigonométrique	Forme trigonométrique → algébrique
$r=\sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\theta=\dfrac{a}{r}$, $\sin\theta=\dfrac{b}{r}$	$a=r\cos\theta$, $b=r\sin\theta$

◆ **Propriété**

- z réel strictement positif $\Leftrightarrow \arg(z)\equiv 0\ [2\pi]$; réel strictement négatif $\Leftrightarrow \arg(z)\equiv \pi\ [2\pi]$.
- z imaginaire pur non nul $\Leftrightarrow \arg(z)\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.
- $\arg(\overline{z})\equiv -\arg(z)$; $\arg(-z)\equiv \pi+\arg(z)\ [2\pi]$.
- $[r,\theta]=[r',\theta'] \Leftrightarrow r=r'$ et $\theta\equiv\theta'\ [2\pi]$.

◆ **Exemple corrigé**

Écrire sous forme trigonométrique $z_1=1+i$ et $z_2=-\sqrt{3}+i$.

Solution.

- $|z_1|=\sqrt{2}$, $\cos\theta=\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$: $z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.
- $|z_2|=2$, $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta=\frac{1}{2}$: $z_2=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

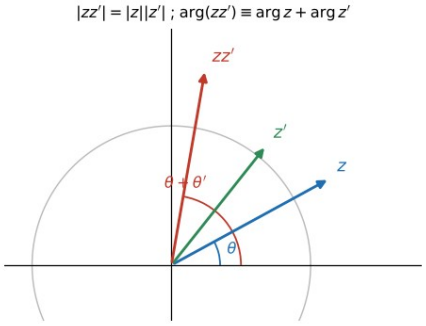
6 Opérations sous forme trigonométrique — formule de Moivre

◆ **Théorème — pour $z=[r,\theta]$, $z'=[r',\theta']$ non nuls et $n\in IN^*$**

- $zz'=[rr',\theta+\theta']$: les modules se multiplient, les arguments s'ajoutent.
- $\frac{1}{z}=[\frac{1}{r},-\theta]$; $\frac{z}{z'}=[\frac{r}{r'},\theta-\theta']$.
- $z^n=[r^n,n\theta]$. En particulier, **formule de Moivre** : $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$.

◆ **Démonstration — produit**

$zz'=rr'[(\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta')+i(\sin\theta\cos\theta'+\cos\theta\sin\theta')]=rr'[\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')]$ par les formules d'addition. La formule de Moivre s'en déduit par récurrence.



◆ **Exemple corrigé — puissance**

Calculer $(1+i)^8$.

Solution. $1+i=[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}]$ donc $(1+i)^8=[(\sqrt{2})^8,2\pi]=[16,0]=16$.

◆ **Exemple corrigé — valeurs exactes**

En calculant de deux façons le quotient $\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$, déterminer $\cos\frac{\pi}{12}$.

Solution. Forme trigonométrique : $[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}]=[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{12}]$. Forme algébrique : $\frac{(1+i)(\sqrt{3}-i)}{4}=\frac{\sqrt{3}+1}{4}+i\frac{\sqrt{3}-1}{4}$. En identifiant les parties réelles : $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+1}{4}$, d'où $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

7 Équations du second degré à coefficients réels

◆ **Propriété — équation $z^2=a$ (a réel)**

- Si $a\geq 0$: $z=\sqrt{a}$ ou $z=-\sqrt{a}$.
- Si $a<0$: $z=i\sqrt{-a}$ ou $z=-i\sqrt{-a}$.

◆ **Théorème — $az^2+bz+c=0$, a, b, c réels, $a\neq 0$, $\Delta=b^2-4ac$**

- $\Delta>0$: deux solutions réelles $\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- $\Delta=0$: une solution double $-\frac{b}{2a}$.
- $\Delta<0$: deux solutions complexes conjuguées $z_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2=\overline{z_1}$.

Dans tous les cas : $z_1+z_2=-\frac{b}{a}$ et $z_1z_2=\frac{c}{a}$.

◆ **Démonstration**

Forme canonique : $az^2+bz+c=a[(z+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a^2}]$. Si $\Delta<0$, $\frac{\Delta}{4a^2}=(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a})^2$ et l'on factorise par $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$.

◆ **Exemple corrigé**

$z^2-2z+5=0$: $\Delta=4-20=-16=(4i)^2$, donc $z_1=\frac{2+4i}{2}=1+2i$ et $z_2=1-2i$.

Fiche mémo

Notion	À retenir
Forme algébrique	$z=a+ib,\ i^2=-1\ ;\ z\in IR \Leftrightarrow \overline{z}=z$
Conjugué	$\overline{z}=a-ib\ ;\ z\,\overline{z}=a^2+b^2$
Module	$\lvert z\rvert=\sqrt{a^2+b^2}\ ;\ AB=\lvert z_B-z_A\rvert\ ;\ \lvert zz'\rvert=\lvert z\rvert\lvert z'\rvert$
Argument	$\arg(z)\equiv(\vec{u},\overrightarrow{OM})\ \ [2\pi]$
Forme trigonométrique	$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\ ;\ a=r\cos\theta,\ b=r\sin\theta$
Produit, puissance	$[r,\theta][r',\theta']=[rr',\theta+\theta']\ ;\ [r,\theta]^n=[r^n,n\theta]$
Second degré, $\Delta<0$	$z=\dfrac{-b\pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$