EXERCICES • 3ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 10 — Dénombrement

1 Ensembles et cardinaux

Exercice 1

Soit E l'ensemble des entiers naturels n tels que $1 \leq n \leq 1000$. Pour tout entier p, on note $M(p)$ l'ensemble des multiples de p appartenant à E.

1) Calculer $\text{card}\, M(5)$, $\text{card}\, M(7)$, $\text{card}\, \overline{M(5)}$ et $\text{card}\, \overline{M(7)}$.

2) Définir $M(5) \cap M(7)$ et calculer son cardinal.

3) Combien d'éléments de E sont divisibles par 5 ou par 7 ?

4) Combien d'éléments de E ne sont divisibles ni par 5 ni par 7 ?

5) Justifier que $\text{card}\,(M(2) \cap M(4)) = \text{card}\, M(4)$.

Exercice 2

Dans une classe de 30 élèves, 17 aiment les maths (M), 12 la physique (P) et 10 les deux. Combien d'élèves aiment :

1) les maths ou la physique ;

2) les maths seulement ;

3) la physique seulement ;

4) ni l'une ni l'autre ?

Exercice 3

20 élèves aiment les maths, 14 la physique, 10 l'anglais ; 9 aiment maths et physique, 5 maths et anglais, 7 physique et anglais, et 2 les trois. Chaque élève aime au moins une matière. Combien y a-t-il d'élèves ?

2 Permutations et anagrammes

Exercice 4

1) Combien y a-t-il d'anagrammes du mot « Maths » ?

2) Combien y a-t-il d'anagrammes du mot « Mathématiques » (on ne distingue pas majuscule et minuscule, mais é ≠ e) ?

3) Combien y a-t-il d'anagrammes du mot « MATHEMATIQUES » ?

4) Combien de mots de 4 lettres distinctes formés avec a, k, i, r ont les voyelles a et i non voisines ?

5) On admet que le mot le plus long est « anticonstitutionnellement » (25 lettres). Combien la langue française contient-elle au maximum de mots ?

Exercice 5

1) On forme des nombres de cinq chiffres distincts pris parmi $1, 2, 3, 4, 5$. Combien peut-on en former ? Combien d'entre eux ont 3 pour chiffre des unités ? Combien sont pairs ?

2) Reprendre la question 1) avec les chiffres $0, 1, 2, 3, 4$ (un nombre ne commence pas par 0).

3) On forme des nombres de cinq chiffres distincts pris parmi $0, 1, ..., 9$. Combien peut-on en former ? Combien ont un chiffre des unités premier ? Combien sont pairs ? Combien comportent le chiffre 2 ?

4) Reprendre la question 3) avec des chiffres non nécessairement distincts.

Exercice 6

Une urne contient 49 boules numérotées de 1 à 49. On tire successivement sans remise 6 boules. Combien y a-t-il de tirages :

1) au total ;

2) avec 3 numéros pairs et 3 impairs ;

3) avec au moins 5 numéros pairs ?

3 Tirages

Exercice 7

Un sac contient 9 jetons : quatre blancs marqués $1, 1, 2, 6$ et cinq rouges marqués $2, 2, 2, 3, 4$.

I. On tire simultanément 3 jetons.

1) Combien y a-t-il de tirages possibles ?

2) Combien y a-t-il de tirages comprenant :

a) trois rouges ;

b) au moins un blanc ;

c) trois jetons de somme 8 ;

d) un seul blanc et un seul jeton portant un multiple de 3 ;

e) deux jetons portant 1 et un seul portant 2.

II. On tire successivement et sans remise 3 jetons. Déterminer le nombre de tirages tels que :

1) le premier porte 2 ;

2) un seul jeton marqué 2 ;

3) le premier est blanc et le deuxième marqué 2.

III. Reprendre les questions de la partie II lorsque les tirages successifs se font avec remise.

Exercice 8

1) Combien y a-t-il de nombres de 3 chiffres distincts ? Combien d'entre eux sont pairs ?

2) Combien y a-t-il de nombres de 3 chiffres écrits avec exactement 2 chiffres distincts, l'un étant répété deux fois ?

3) Nombres de 4 chiffres écrits avec exactement 2 chiffres distincts.

Exercice 9

Une urne contient 5 boules blanches, 4 noires et 3 vertes. On tire successivement sans remise 4 boules. Nombre de tirages comprenant :

1) exactement deux blanches ;

2) au moins une noire ;

3) au plus une blanche ;

4) une seule couleur ;

5) les trois couleurs ;

6) exactement deux couleurs ;

7) la première blanche tirée au 2e rang ;

8) la première boule blanche ;

9) la deuxième boule noire ;

10) la troisième boule verte.

Exercice 10

Une urne contient 7 boules rouges numérotées 0, 7, 7, 8, 8, 8, 9 et 5 boules noires numérotées 0, 0, 7, 8, 9.

1) On tire simultanément 5 boules. Nombre de tirages :

a) de boules de même couleur ;

b) dont la somme des numéros est paire.

2) On tire successivement sans remise 4 boules. Nombre de tirages où :

a) les quatre numéros 0, 7, 8, 9 sont obtenus ;

b) une rouge à numéro pair apparaît pour la première fois au 3e tirage ;

c) une rouge numéro 7 apparaît pour la dernière fois au 2e tirage ;

d) les boules alignées dans l'ordre forment : i) le nombre 80 (écrit 0080) ; ii) un nombre de quatre chiffres ; iii) le nombre 8008 avec des couleurs alternées.

Exercice 11

Avec trois dés, 9 et 10 s'écrivent chacun de six façons comme somme de trois entiers de 1 à 6. Justifier pourtant que « la somme est 9 » compte 25 issues et « la somme est 10 » en compte 27.

Exercice 12

On fait tourner 5 disques à 6 secteurs numérotés de 1 à 6 pour obtenir un nombre à 5 chiffres.

1) Nombre de résultats ?

2) Nombres sans le chiffre 1 ?

3) Nombres comprenant au moins trois fois le chiffre 1 ?

Exercice 13

On jette 3 dés de couleurs différentes. Dénombrer :

1) tous les résultats ;

2) ceux comportant un seul 4 ;

3) exactement deux 4 ;

4) aucun 4 ;

5) trois chiffres différents.

Exercice 14

Un groupe de 10 personnes comprend 5 personnes de groupe A, 3 de groupe B et 2 de groupe O.

I. On choisit 4 personnes. Nombre de choix comprenant :

1) exactement 2 personnes du groupe B ;

2) au moins 2 du groupe B ;

3) au plus une du groupe O ;

4) les trois groupes.

II. Les dix personnes, malades, appellent chacune un et un seul des trois médecins X, Y, Z.

1) Nombre de cas ?

2) Parmi elles, 3 frères :

a) appellent le même médecin ;

b) appellent des médecins deux à deux différents.

3) a) X reçoit exactement 4 appels ;

b) les 10 malades appellent le même médecin ;

c) les 3 médecins sont appelés.

Exercice 15

Une classe de 10 garçons et 8 filles monte une pièce avec 3 rôles masculins et 2 rôles féminins.

1) a) Nombre de troupes (3 garçons, 2 filles) ?

b) Pour une troupe, nombre de façons de distribuer les rôles ?

2) Zakaria et Yasmine font partie de la classe. Nombre de distributions :

a) où Yasmine joue ;

b) où Zakaria et Yasmine jouent ensemble ;

c) où aucun des deux ne joue.

Exercice 16

On range trois boules a, b, c dans cinq casiers numérotés de 1 à 5 (un casier peut contenir plusieurs boules).

1) Nombre de rangements ?

2) Chaque casier contient au plus une boule ?

3) Le casier 1 contient 2 boules et le casier 2 une ?

4) Le casier 1 est vide ?

5) Si chaque casier contient au plus une boule :

a) nombre de rangements ;

b) casier 1 vide ?

4 Identités combinatoires

Exercice 17

Un sac contient n boules noires et b boules blanches ; on tire simultanément p boules ($p \leq b \leq n$).

1) Dénombrer les tirages comportant exactement k boules noires ($0 \leq k \leq p$).

2) En déduire $C_n^{\,0} C_b^{\,p} + C_n^{\,1} C_b^{\,p-1} + \ldots + C_n^{\,p} C_b^{\,0} = C_{n+b}^{\,p}$.

Exercice 18

1) Démontrer que $2^n = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n$.
2) Calculer $C_n^0 - C_n^1 + \ldots + (-1)^n C_n^n$.
3) Calculer $s_n = C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n$ et $t_n = 2C_n^2 + 6C_n^3 + \ldots + n(n-1)C_n^n$.
4) En déduire $z_n = C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \ldots + n^2 C_n^n$.

Exercice 19

Démontrer :

1) $C_{p+1}^q = C_p^q + C_{p-1}^{q-1} + \ldots + C_{p-q}^0$ $(0 \leq q \leq p)$;
2) $C_{n+1}^{p+1} = C_p^p + C_{p+1}^p + \ldots + C_n^p$ $(0 \leq p \leq n)$.

Exercice 20

1) En utilisant $(1+x)^p (1+x)^q = (1+x)^{p+q}$, montrer que $C_{p+q}^p = C_p^0 C_q^p + C_p^1 C_q^{p-1} + \ldots + C_p^p C_q^0$ (avec $p \leq q$).
2) En déduire $C_{2n}^n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2$.

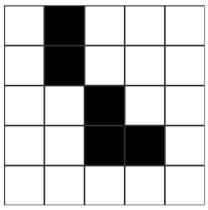
Exercice 21

Soit $E = \{0 ; 1 ; \ldots ; n\}$.

1) Combien y a-t-il de couples $(x ; y)$ d'éléments de E avec $x < y$? En déduire $1 + 2 + \ldots + n = C_{n+1}^2$.
2) Combien de triplets $(x ; y ; z)$ avec $x < y < z$?

Exercice 22

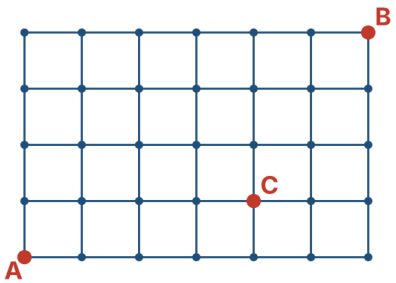
Une grille de mots croisés a 25 cases blanches ou noires. Combien de grilles ont 5 cases noires ? 20 cases blanches ?



Exercice 23

On se déplace sur le quadrillage ci-dessous de A vers B, uniquement vers la droite ou vers le haut.

1) Combien y a-t-il de trajets ?
2) Combien passent par C ?



Exercice 24

(U_n) est arithmétique de premier terme U_0 et de raison r. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $A_k = \sum_{p=0}^{n} (C_n^p)^k$ et $B_k = \sum_{p=0}^{n} U_p (C_n^p)^k$.

1) Démontrer que $B_k = \sum_{p=0}^{n} U_{n-p} (C_n^p)^k$.

2) En déduire que $2B_k = (2U_0 + nr) A_k$.

3) Calculer A_0, A_1, B_0, B_1.

4) Exprimer A_2 à l'aide de l'exercice 20.

Exercice 25

Cet exercice reprend mot pour mot l'énoncé de l'exercice 16 : traiter à nouveau les questions sans regarder le corrigé, puis comparer.

Auto-évaluation : vrai ou faux ?

Affirmation	Vrai	Faux
1. $A_5^2 = 20$.	☐	☐
2. $C_6^2 = C_6^4$.	☐	☐
3. Le nombre de parties d'un ensemble à 5 éléments est 25.	☐	☐
4. Le nombre de façons de ranger 4 livres sur une étagère est 24.	☐	☐