COURS • 3ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 10 — Dénombrement

◆ **Sommaire**

- 1. Cardinal d'un ensemble fini
- 2. Produit cartésien, principe multiplicatif, arbre de choix
- 3. p-listes
- 4. Arrangements et permutations
- 5. Combinaisons
- 6. Propriétés des combinaisons — triangle de Pascal
- 7. Formule du binôme de Newton
- 8. Fiche mémo

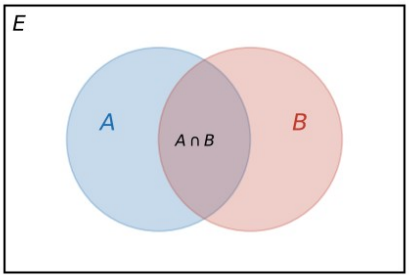
◆ **L'essentiel à retenir — Objectifs du programme officiel**

- Dénombrer à l'aide de diagrammes, de tableaux, d'arbres et du principe multiplicatif.
- Reconnaître une p-liste, un arrangement, une permutation, une combinaison.
- Utiliser les propriétés des combinaisons et la formule du binôme.

1 Cardinal d'un ensemble fini

◆ **Définition**

Le **cardinal** d'un ensemble fini E est le nombre de ses éléments ; on le note $\text{card}\, E$. Par convention $\text{card}\, \varnothing = 0$.



◆ Propriété — A et B parties d'un ensemble fini E

- Si A et B sont disjoints : $\text{card}(A \cup B) = \text{card}\, A + \text{card}\, B$.
- Dans tous les cas : $\text{card}(A \cup B) = \text{card}\, A + \text{card}\, B - \text{card}(A \cap B)$.
- Complémentaire : $\text{card}\, \overline{A} = \text{card}\, E - \text{card}\, A$.
- Trois parties :
  $\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}\, A + \text{card}\, B + \text{card}\, C - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) + \text{card}($
  .

◆ Exemple corrigé

Dans une classe de 32 élèves, 18 pratiquent le football, 12 le handball et 5 les deux sports. Combien ne pratiquent aucun de ces deux sports ?

Solution. $\text{card}(F \cup H) = 18 + 12 - 5 = 25$; donc $32 - 25 = 7$ élèves ne pratiquent aucun des deux sports.

2 Produit cartésien, principe multiplicatif, arbre de choix

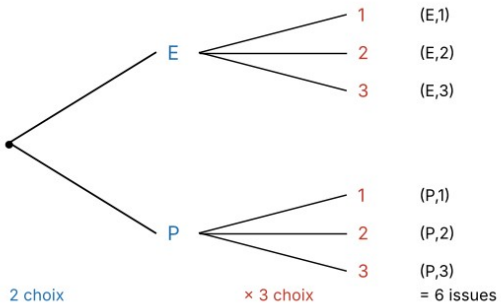
◆ Définition

Le **produit cartésien** $A \times B$ est l'ensemble des couples $(a\,;b)$ avec $a \in A$ et $b \in B$. Plus généralement, $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p$ est l'ensemble des p-uplets $(x_1;\ldots;x_p)$ avec $x_i \in E_i$.

◆ Théorème — principe multiplicatif

$\text{card}(A \times B) = \text{card}\, A \times \text{card}\, B$ et $\text{card}(E_1 \times \ldots \times E_p) = \text{card}\, E_1 \times \ldots \times \text{card}\, E_p$.

Si une situation se décompose en p étapes successives offrant respectivement n_1, n_2, ..., n_p choix, le nombre total d'issues est $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p$.



3 p-listes

◆ Définition

Soit E un ensemble à n éléments et $p \geq 1$. Une **p-liste** d'éléments de E est un élément de $E^p = E \times \ldots \times E$, c'est-à-dire une suite ordonnée de p éléments de E, **distincts ou non**.

◆ Théorème

Le nombre de p-listes d'un ensemble à n éléments est n^p.

◆ Exemple corrigé

- Un code de carte bancaire a 4 chiffres : $10^4 = 10000$ codes possibles.
- On lance 3 fois un dé à 6 faces : $6^3 = 216$ résultats ordonnés.

4 Arrangements et permutations

◆ Définition

- Pour $1 \leq p \leq n$, un **arrangement** de p éléments de E ($\text{card}\, E = n$) est une p-liste d'éléments **deux à deux distincts**.
- Une **permutation** de E est un arrangement des n éléments de E.
- **Factorielle** : $0\,! = 1$ et $n\,! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$ pour $n \geq 1$.

◆ Théorème

Le nombre d'arrangements de p éléments parmi n est $A_n^{\,p} = n(n-1)\ldots(n-p+1) = \dfrac{n\,!}{(n-p)\,!}$.

Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est $n\,!$.

◆ Démonstration

On choisit le 1er élément parmi n, le 2e parmi les $n-1$ restants, ..., le p-ième parmi $n-p+1$: principe multiplicatif.

◆ Exemple corrigé — anagrammes

- « MATHS » : 5 lettres distinctes, $5\,! = 120$ anagrammes.
- Podium de 3 coureurs parmi 8 : $A_8^{\,3} = 8 \times 7 \times 6 = 336$ podiums.
- « ANANAS » : 6 lettres dont A trois fois, N deux fois : $\dfrac{6\,!}{3\,! \times 2\,!} = 60$ anagrammes.

5 Combinaisons

◆ Définition

Pour $0 \leq p \leq n$, une **combinaison** de p éléments de E ($\text{card}\, E = n$) est une **partie** de E ayant p éléments. L'ordre n'intervient pas.

◆ Théorème

Le nombre de combinaisons de p éléments parmi n est $C_n^{\,p} = \dfrac{A_n^{\,p}}{p!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

◆ Démonstration

À chaque partie à p éléments correspondent $p!$ arrangements (on ordonne ses éléments de toutes les façons). Donc $A_n^{\,p} = p! \times C_n^{\,p}$.

Choix de p objets parmi n	Ordre ?	Répétitions ?	Nombre
p-liste	oui	oui	n^p
arrangement	oui	non	$A_n^{\,p}$
permutation ($p=n$)	oui	non	$n!$
combinaison	non	non	$C_n^{\,p}$

◆ Exemple corrigé

- Loto : 6 numéros parmi 49 sans ordre : $C_{49}^{\,6} = 13983816$ grilles.
- Une urne contient 5 boules rouges et 4 vertes. On tire simultanément 3 boules. Nombre de tirages contenant exactement 2 rouges : $C_5^{\,2} \times C_4^{\,1} = 10 \times 4 = 40$.

6 Propriétés des combinaisons — triangle de Pascal

◆ Théorème

- $C_n^{\,0} = C_n^{\,n} = 1$; $C_n^{\,1} = n$.
- Symétrie : $C_n^{\,p} = C_n^{\,n-p}$.
- **Relation de Pascal** : $C_n^{\,p} + C_n^{\,p+1} = C_{n+1}^{\,p+1}$ pour $0 \le p \le n-1$.

◆ Démonstration — relation de Pascal

Soit E à $n+1$ éléments et $a \in E$. Les parties de E à $p+1$ éléments sont de deux sortes : celles qui contiennent a ($C_n^{\,p}$: on complète par p éléments parmi les n autres) et celles qui ne le contiennent pas ($C_n^{\,p+1}$). D'où la relation.

$n \setminus p$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Chaque coefficient est la somme du coefficient situé au-dessus et de celui situé au-dessus à gauche (relation de Pascal).

7 Formule du binôme de Newton

◆ Théorème

Pour tous réels a, b et tout entier $n \geq 1$:

$$(a+b)^n = C_n^{\,0} a^n + C_n^{\,1} a^{n-1} b + C_n^{\,2} a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{\,n-1} a\, b^{n-1} + C_n^{\,n} b^n.$$

Le terme général est $C_n^{\,k} a^{n-k} b^k$, $0 \leq k \leq n$.

◆ Démonstration — idée

En développant le produit de n facteurs $(a+b)$, on obtient le terme $a^{n-k} b^k$ autant de fois qu'il y a de façons de choisir les k facteurs dans lesquels on prend b, soit $C_n^{\,k}$ fois. (Une démonstration par récurrence utilise la relation de Pascal.)

◆ Propriété — conséquences

- $C_n^{\,0} + C_n^{\,1} + \ldots + C_n^{\,n} = 2^n$ ($a = b = 1$) : un ensemble à n éléments possède 2^n parties.
- $C_n^{\,0} - C_n^{\,1} + C_n^{\,2} - \ldots + (-1)^n C_n^{\,n} = 0$ ($a = 1$, $b = -1$).

◆ Exemple corrigé

$$(x+2)^4 = x^4 + 4x^3 \times 2 + 6x^2 \times 4 + 4x \times 8 + 16 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16.$$

Fiche mémo

Notion	À retenir
Réunion	$\text{card}(A \cup B) = \text{card}\, A + \text{card}\, B - \text{card}(A \cap B)$
Principe multiplicatif	$\text{card}(A \times B) = \text{card}\, A \times \text{card}\, B$
p-listes	n^p (ordre, répétitions)
Arrangements	$A_n^{\,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ (ordre, sans répétition) ; permutations $n!$
Combinaisons	$C_n^{\,p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ (sans ordre)
Pascal	$C_n^{\,p} + C_n^{\,p+1} = C_{n+1}^{\,p+1}$; $C_n^{\,p} = C_n^{\,n-p}$
Binôme	$(a+b)^n$: terme général $C_n^{\,k} a^{n-k} b^k$; somme des $C_n^{\,k}$ égale à 2^n