EXERCICES • 3ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 1 — Produit scalaire dans le plan

1 Orthogonalité dans des configurations

Exercice 1

$ABCD$ est un carré de côté a et $m \in]0\,;1[$. Les points A', B', C', D' vérifient $\overrightarrow{DA'} = m\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AB'} = m\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC'} = m\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD'} = m\overrightarrow{CD}$. Démontrer que $A'B'C'D'$ est un carré.

Exercice 2

ABC est isocèle en A, I le milieu de $[BC]$ et H le projeté orthogonal de I sur (AC).

1) Démontrer que $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{CH}$.

2) Calculer $\overrightarrow{AH}\cdot(\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC})$ et en déduire que $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HC}$.

3) Démontrer que $(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AH})\cdot\overrightarrow{BH} = 0$. En déduire que si J est le milieu de $[IH]$, $(AJ)\perp(BH)$.

Exercice 3

$ABCD$ est un carré de côté a, I le milieu de $[AB]$ et J celui de $[BC]$.

1) Exprimer $\overrightarrow{DI}$ et $\overrightarrow{DJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$; en déduire $\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{DJ}$.

2) Calculer DI et DJ.

3) En déduire $\cos\widehat{IDJ}$.

Exercice 4

ABC est rectangle en A, H est le pied de la hauteur issue de A, I le milieu de $[AB]$, J celui de $[AC]$. Prouver que $(HI)\perp(HJ)$.

Exercice 5

ABC est isocèle de sommet A, A' le milieu de $[BC]$, H le projeté de A' sur (AC) et I le milieu de $[A'H]$. Démontrer :

1) $\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CH}$;

2) $\overrightarrow{A'H}\cdot\overrightarrow{BC} = 2\,\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{A'C}$;

3) $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{CH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A'H}\cdot\overrightarrow{BC}$;

4) $(AI)\perp(BH)$.

Exercice 6

$ABCD$ est un carré de centre O, $M \in [AB]$; la perpendiculaire à (DM) passant par A coupe $[BC]$ en P.

1) Montrer que $AM = BP$ et que $(OM)\perp(OP)$.

2) Montrer que, lorsque M décrit (AB), le milieu I de $[MP]$ reste sur la médiatrice de $[OB]$.

Exercice 7

$[Ox\backslash)$ et $[Oy\backslash)$ sont deux demi-droites perpendiculaires. A, B sont sur $[Ox\backslash)$; C, D sur $[Oy\backslash)$ avec $OC=OB$ et $OD=OA$; I est le milieu de $[AC]$ et J celui de $[BD]$. Montrer que la médiane (OI) du triangle OAC est la hauteur du triangle OBD, et que (OJ) est la hauteur de OAC.

Exercice 8

M est un point de la diagonale $[AC]$ d'un carré $ABCD$, distinct de A et C ; il se projette en P et Q sur $[AB]$ et $[BC]$.

1) Montrer que $(DM)\perp(PQ)$.

2) O étant le centre du carré, montrer que OPQ est rectangle isocèle.

Exercice 9

ABC est rectangle isocèle en A ; $I\in[AB]$ avec $AI=\dfrac{AB}{3}$, $J\in[AC]$ avec $AJ=\dfrac{AC}{3}$, K le milieu de $[IC]$. Démontrer que $(AK)\perp(JB)$.

Exercice 10

ABC est un triangle et Δ une droite passant par A ; B' et C' sont les projetés de B et C sur Δ ; I est l'intersection de la perpendiculaire à (AC) menée de B' et de la perpendiculaire à (AB) menée de C'.

1) Démontrer que $\overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AC}$.

2) En déduire que $(AI)\perp(BC)$.

3) Quel résultat retrouve-t-on en choisissant $\Delta=(AB)$?

Exercice 11

$ABCD$ est un carré de côté a, I le milieu de $[BC]$, E l'intersection de (AI) et (BD).

1) a) Calculer AI et DB.

b) Calculer $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BD}$, puis $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{DB}$.

2) En déduire une valeur à $0{,}1\,°$ près de l'angle $\widehat{BEI}$.

Exercice 12

(C) est un cercle de centre O et de rayon R, M un point extérieur ; une droite passant par M coupe (C) en A et B ; A' est diamétralement opposé à A ; (MT) est tangente en T.

1) Démontrer que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA'}=MO^2-R^2$.

2) En déduire que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MT^2$.

Exercice 13

$ABCD$ est un carré de côté a ; I, J, K sont les milieux de $[AB]$, $[AD]$, $[AI]$ et H le projeté de A sur (DI). On veut montrer que $(JH)\perp(HK)$. 1**re méthode.**

a) Montrer que $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HI}=2\overrightarrow{HK}$ et $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HD}=2\overrightarrow{HJ}$.

b) En déduire $4\overrightarrow{HK}\cdot\overrightarrow{HJ}=HA^2+\overrightarrow{HI}\cdot\overrightarrow{HD}$.

c) Démontrer que $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AD}=AH^2+\overrightarrow{HI}\cdot\overrightarrow{HD}$.

d) Conclure. 2**e méthode.** Dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$:

a) équations de (DI) et (AH) ;

b) coordonnées de H ;

c) vérifier que $(JH)\perp(HK)$.

Exercice 14

$ABCD$ est un rectangle avec $AB=2\,BC=2$; $J\in[CD]$ avec $CJ=\dfrac{1}{2}$; (BJ) coupe (AC) en I et (AD) en K.

I. 1) Faire une figure et vérifier que $AC=\sqrt{5}$.

2) Calculer $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CJ}$.

3) En déduire que $(BJ)\perp(AC)$.

4) a) Calculer BJ.

b) Démontrer que $BI=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

c) Calculer $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BJ}$.

5) Démontrer que $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{BC}=4$.

II. On considère les ensembles $E=\{M:M\,A^2+M\,B^2=6\}$ et $F=\{M:3\,M\,A^2+M\,K^2=16\}$.

1) Vérifier que $C\in E$ puis déterminer et construire E.

2) Vérifier que $A\in F$ puis déterminer et construire F.

Exercice 15

$ABCD$ est un rectangle avec $AD=a$ et $AB=a\sqrt{2}$; E est le milieu de $[AB]$. Que peut-on dire des droites (AC) et (DE) ?

Exercice 16

I et J sont les milieux de $[BC]$ et $[CD]$ d'un carré $ABCD$ de côté a ; $\theta=\widehat{IAJ}$. Donner la valeur exacte de $\cos\theta$, puis une valeur à $0{,}01$ près.

Exercice 17

ABC est un triangle, $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$.

1) Développer $\|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\|^2$.

2) En déduire que $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2\,abc}=\dfrac{\cos\widehat{A}}{a}+\dfrac{\cos\widehat{B}}{b}+\dfrac{\cos\widehat{C}}{c}$.

Exercice 18

1) Montrer que $\|\vec{u}+\vec{v}\|\le\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$.

2) En déduire que dans un triangle ABC : $AB\le AC+CB$.

3) I, J, K étant les milieux de $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$, démontrer que $AI+BJ+CK\le AB+BC+CA$.

Exercice 19

$ABCD$ est un rectangle, M et N deux points quelconques. Démontrer que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DN}$.

Exercice 20

ABC vérifie $BC=8$, $AB=6$ et $\widehat{ABC}=\dfrac{2\pi}{3}$. Soit $f(M)=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AM}$ et $\zeta_a=\{M:f(M)=a\}$.

1) Déterminer ζ_0.

2) Calculer $f(B)$ et $f(C)$.

3) Déterminer a tel que ζ_a soit la médiatrice de $[BC]$.

Exercice 21

AOB est rectangle en O, I le milieu de $[AB]$, M un point quelconque.

1) Montrer que $MA^2+MB^2-2MO^2=AB^2+4\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{OI}$.

2) Déterminer l'ensemble Δ des points M tels que $MA^2+MB^2-2MO^2=\dfrac{AB^2}{2}$.

Exercice 22

ABC est rectangle isocèle en A avec $AB=AC=5$.

1) Déterminer le barycentre G de $(A;-1),(B;1),(C;1)$.

2) Montrer que $MB^2+MC^2-MA^2=MG^2$.

3) Déterminer $\Gamma=\{M:MB^2+MC^2-MA^2=25\}$.

4) Déterminer l'ensemble Δ des points N tels que $\|\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NC}-\overrightarrow{NA}\|=NO$, où O est le milieu de $[BC]$.

2 Identités

Exercice 23

ABC est un triangle.

1) Démontrer que pour tout M : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

2) En déduire que les trois hauteurs sont concourantes.

Exercice 24

$ABCD$ est un quadrilatère.

1) Démontrer que $AB^2+CD^2=AD^2+BC^2+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}$.

2) En déduire que les diagonales sont perpendiculaires si et seulement si $AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$.

3) I, J étant les milieux de $[AC]$ et $[BD]$:

a) démontrer que $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4IJ^2$;

b) en déduire que $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2$.

Exercice 25

ABC est un triangle. Déterminer :

1) $E=\{M:\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AM}\}$;

2) $F=\{M:\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AM}\}$.

Exercice 26

$ABCD$ est un parallélogramme ; de C on abaisse les perpendiculaires (CE) sur (AB) et (CF) sur (BD). Démontrer que $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BF}=BC^2+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BE}$.

Exercice 27

Repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) (D) : $ax+by+c=0$, $A(x_0;y_0)$, H le projeté de A sur (D), $\vec{n}(a;b)$. Calculer $\vec{n}\cdot\overrightarrow{HA}$ de deux façons et en déduire $AH=\dfrac{|a\,x_0+b\,y_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

2) Application : $A(2;0)$, $B(4;1)$, $C(1;2)$.

a) Équations des trois côtés.

b) Équations des trois bissectrices intérieures et coordonnées du centre I du cercle inscrit.

Auto-évaluation : vrai ou faux ?

Affirmation	Vrai	Faux
1. $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ équivaut à $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$.	☐	☐
2. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AH$ où H est le projeté de C sur (AB), si $H\in[AB\setminus)$.	☐	☐
3. $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}$.	☐	☐
4. Dans un triangle, $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\widehat{A}$.	☐	☐