COURS • 3ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

# Chapitre 1 — Produit scalaire dans le plan

◆ **Sommaire**


- 1. Définition du produit scalaire (projection orthogonale)
- 2. Expression à l'aide du cosinus — orthogonalité
- 3. Propriétés algébriques et expressions à l'aide des normes
- 4. Expression analytique dans une base orthonormée
- 5. Inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski
- 6. Relations métriques dans un triangle
- 7. Ensembles de points (lignes de niveau)
- 8. Droites et cercles dans un repère orthonormé
- 9. Fiche mémo, exercices et corrigés détaillés


◆ **L'essentiel à retenir — Objectifs du programme officiel**

- Calculer un produit scalaire par projection, à l'aide du cosinus, des normes ou des coordonnées.
- Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité ou calculer une longueur, un angle, une aire.
- Établir et utiliser les relations métriques dans un triangle : Al-Kashi, médiane, formule des sinus.
- Déterminer des ensembles de points ; écrire et exploiter des équations de droites et de cercles.

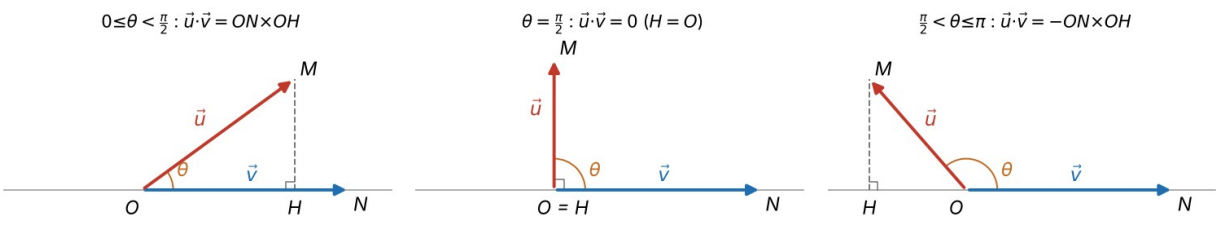
## 1 Définition du produit scalaire

Dans tout le chapitre, le plan est muni d'une unité de longueur. La **norme** d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la distance $AB$ ; on la note $\|\overrightarrow{AB}\|$.

◆ **Définition — produit scalaire par projection**

Soient $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{ON}$ deux vecteurs. On appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ défini par :

- si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ : $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ ;
- sinon, si $H$ est le projeté orthogonal de $M$ sur la droite $(ON)$ : $\vec{u}\cdot\vec{v}=ON\times OH$ si $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{ON}$ ont le même sens, et $\vec{u}\cdot\vec{v}=-ON\times OH$ s'ils sont de sens contraires.



**◆ Propriété — conséquence pratique**

Pour calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$, on peut remplacer $\overrightarrow{CD}$ par son projeté orthogonal $\overrightarrow{C'D'}$ sur la droite $(AB)$ : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}$.

## 2 Expression à l'aide du cosinus — orthogonalité

**◆ Théorème**

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls et si $\theta$ est une mesure de l'angle géométrique qu'ils forment ($0\le\theta\le\pi$), alors :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\theta$$

**◆ Démonstration**

Avec $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$, $\vec{v}=\overrightarrow{ON}$ : dans le triangle $OHM$ rectangle en $H$, $OH=OM\times|\cos\theta|$. Si $\theta<\frac{\pi}{2}$, $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{ON}$ ont le même sens et $\cos\theta>0$ ; si $\theta>\frac{\pi}{2}$, ils sont de sens contraires et $\cos\theta<0$. Dans les deux cas $\pm ON\times OH=ON\times OM\times\cos\theta$ ; si $\theta=\frac{\pi}{2}$, $H=O$ et les deux membres sont nuls.

**◆ Définition — vecteurs orthogonaux**

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si l'un est nul ou si leurs directions sont perpendiculaires. On a : $\vec{u}\perp\vec{v}$ équivaut à $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

**◆ Exemple corrigé — triangle équilatéral**

$ABC$ est équilatéral de côté $4$.

1) Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

2) Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.

**Solution.**

1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\times4\times\cos60°=8$.

2) L'angle formé par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ mesure $180°-60°=120°$ : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=16\times\cos120°=-8$.

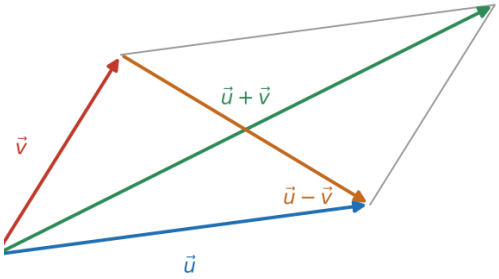
**◆ Attention**

L'angle à utiliser est celui des **vecteurs** (on les fait partir d'un même point), pas l'angle du triangle : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}\neq AB\times BC\times\cos\widehat{ABC}$.

## 3 Propriétés algébriques — expressions à l'aide des normes

**◆ Propriété — pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et tous réels $a$, $b$**

- Symétrie : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$.
- Bilinéarité : $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ et $(a\vec{u})\cdot(b\vec{v})=ab(\vec{u}\cdot\vec{v})$.
- Carré scalaire : $\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$.
- Identités remarquables : $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$ ; $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$ ; $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$.




**◆ Théorème — expressions à l'aide des normes**

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)=\frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$$

**Identité du parallélogramme** : $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=2\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2\right)$ : dans un parallélogramme, la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des quatre côtés.

**◆ Démonstration**

Il suffit de développer les identités remarquables ci-dessus, puis de les ajouter ou de les soustraire membre à membre.

## 4 Expression analytique dans une base orthonormée

**◆ Théorème**

Dans une base orthonormée $(\vec{i},\vec{j})$, si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'\,;\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}\,;AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

En particulier : $\vec{u}\perp\vec{v}\iff xx'+yy'=0$.

**◆ Démonstration**

$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=1$ et $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$ ; on développe $(x\vec{i}+y\vec{j})\cdot(x'\vec{i}+y'\vec{j})$ par bilinéarité.

◆ **Exemple corrigé — triangle rectangle et angle**

Dans un repère orthonormé, $A(1;2)$, $B(4;3)$, $C(0;5)$ et $D(3;6)$.

1) Montrer que le triangle $ABC$ est rectangle en $A$.

2) Calculer $\cos\widehat{BAD}$.

**Solution.**

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-3+3=0$. Donc $(AB)\perp(AC)$.

2) $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=6+4=10$, $AB=\sqrt{10}$, $AD=\sqrt{20}$, donc $\cos\widehat{BAD}=\dfrac{10}{\sqrt{10}\times\sqrt{20}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\widehat{BAD}=45°$.

## 5 Inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski

◆ **Théorème**

- **Cauchy-Schwarz** : $|\vec{u}\cdot\vec{v}|\le\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$, avec égalité si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- **Minkowski** (inégalité triangulaire) : $\|\vec{u}+\vec{v}\|\le\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$, avec égalité si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens.

◆ **Démonstration**

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ sont non nuls : $|\vec{u}\cdot\vec{v}|=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times|\cos\theta|\le\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$, et $|\cos\theta|=1\iff\theta\in\{0;\pi\}$. Ensuite $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2\le\|\vec{u}\|^2+2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|+\|\vec{v}\|^2=(\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|)^2$.

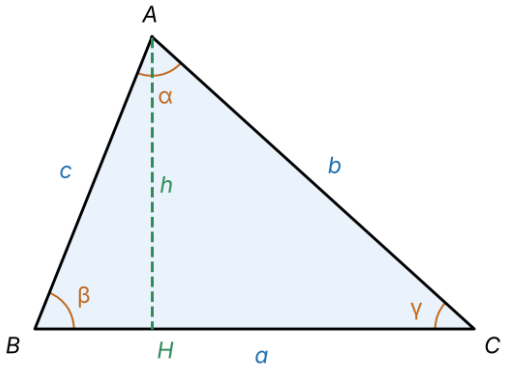
◆ **Exemple corrigé — une inégalité classique**

Montrer que pour tous réels $x$, $y$ : $(x+2y)^2\le5(x^2+y^2)$.

**Solution.** Avec $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ dans une base orthonormée : $\vec{u}\cdot\vec{v}=x+2y$ et Cauchy-Schwarz donne $(x+2y)^2\le(x^2+y^2)\times5$. Égalité si et seulement si $y=2x$.

## 6 Relations métriques dans un triangle

Notations : $a=BC$, $b=CA$, $c=AB$ ; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont les mesures des angles en $A$, $B$, $C$ ; $S$ est l'aire du triangle.




**◆ Théorème — formule d'Al-Kashi**

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha\,;b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta\,;c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$

Si $\alpha=\frac{\pi}{2}$, on retrouve le théorème de Pythagore.

**◆ Démonstration**

$a^2=\|\overrightarrow{BC}\|^2=\|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\|^2=b^2-2\,\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+c^2$ et $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=bc\cos\alpha$.

**◆ Théorème — aire et formule des sinus**

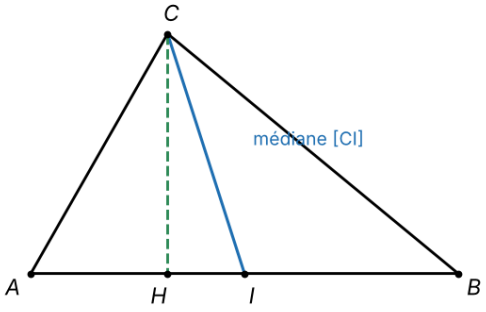
$$S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{1}{2}ac\sin\beta=\frac{1}{2}ab\sin\gamma\,;\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}=\frac{2S}{abc}$$

**◆ Démonstration**

La hauteur issue de $C$ mesure $b\sin\alpha$, d'où $S=\frac{1}{2}c\times b\sin\alpha$ ; on divise les trois expressions de $S$ par $\frac{abc}{2}$ .

**◆ Théorème — théorème de la médiane — $I$ milieu de $[AB]$, $H$ projeté orthogonal de $C$ sur $(AB)$**

$$CA^2+CB^2=2CI^2+\frac{AB^2}{2}\,;\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=CI^2-\frac{AB^2}{4}\,;CA^2-CB^2=2\overrightarrow{IH}\cdot\overrightarrow{AB}$$

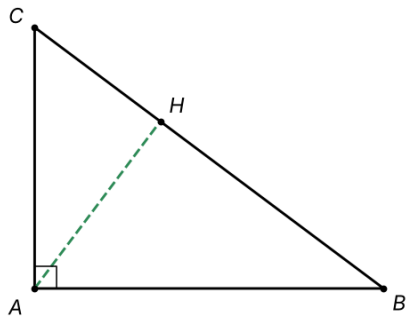


◆ **Démonstration**

On écrit $\vec{CA}=\vec{CI}+\vec{IA}$ et $\vec{CB}=\vec{CI}-\vec{IA}$ (car $\vec{IB}=-\vec{IA}$) puis on développe. Pour la troisième : $CA^2-CB^2=(\vec{CA}+\vec{CB})\cdot(\vec{CA}-\vec{CB})=2\vec{CI}\cdot\vec{BA}$, et l'on projette $\vec{CI}$ sur $(AB)$.

◆ **Propriété — triangle $ABC$ rectangle en $A$, $H$ pied de la hauteur issue de $A$**

$$BC^2=AB^2+AC^2\,;\ AH\times BC=AB\times AC\,;\ AH^2=HB\times HC\,;\ AB^2=BH\times BC\,;\ AC^2=CH\times CB$$




◆ **Exemple corrigé — longueurs dans un triangle**

$ABC$ est un triangle avec $a=7$, $b=5$ et $c=8$ ; $I$ est le milieu de $[BC]$.

1) Calculer $\cos\alpha$ et en déduire $\alpha$.

2) Calculer l'aire $S$ du triangle.

3) Calculer la longueur de la médiane $AI$.

**Solution.**

1) $\cos\alpha=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{25+64-49}{80}=\dfrac{1}{2}$, donc $\alpha=60°$.

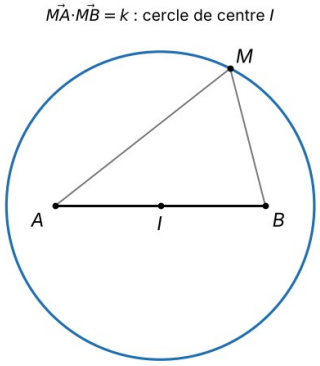
2) $S=\dfrac{1}{2}\times5\times8\times\sin60°=10\sqrt{3}$.

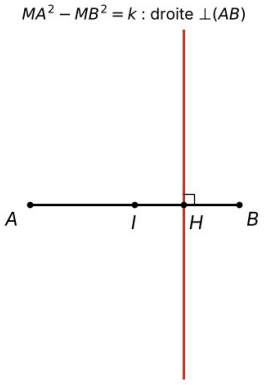
3) $AB^2+AC^2=2AI^2+\dfrac{BC^2}{2}:89=2AI^2+24{,}5$, d'où $AI^2=32{,}25$ et $AI=5{,}5$.

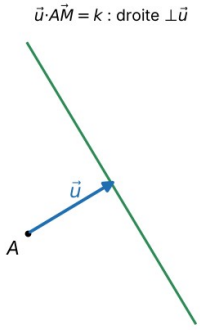
## 7 Ensembles de points (lignes de niveau)

$A$ et $B$ sont deux points distincts, $I$ le milieu de $[AB]$, $k$ un réel et $\vec{u}$ un vecteur non nul.

| Condition sur $M$ | Transformation | Ensemble des points $M$ |
|---|---|---|
| $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AM}=k$ | $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AH}=k$, $H$ fixe | droite perpendiculaire à $\vec{u}$ |
| $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=k$ | $MI^2=k+\dfrac{AB^2}{4}$ | cercle de centre $I$, ou $\{I\}$, ou $\varnothing$ |
| $MA^2+MB^2=k$ | $2MI^2=k-\dfrac{AB^2}{2}$ | cercle de centre $I$, ou $\{I\}$, ou $\varnothing$ |
| $MA^2-MB^2=k$ | $2\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}=k$ | droite perpendiculaire à $(AB)$ |
| $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ | $MI=\dfrac{AB}{2}$ | cercle de diamètre $[AB]$ |




### ◆ Méthode — déterminer un ensemble de points

- Faire apparaître le milieu $I$ (ou un barycentre) grâce à la relation de Chasles.
- Se ramener à une relation du type $MI^2=R$ (cercle, point ou vide) ou $\vec{u}\cdot\overrightarrow{IM}=k$ (droite).
- Discuter suivant le signe de la constante obtenue.

### ◆ Exemple corrigé — deux ensembles

$AB=4$ et $I$ est le milieu de $[AB]$.

**1)** Déterminer l'ensemble $E_1$ des points $M$ tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=5$.

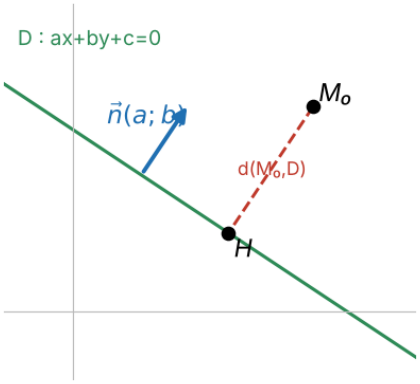
**2)** Déterminer l'ensemble $E_2$ des points $M$ tels que $MA^2-MB^2=8$.

**Solution.**

**1)** $MI^2=5+4=9$ : $E_1$ est le cercle de centre $I$ et de rayon $3$.

**2)** $2\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}=8$, soit $\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}=4$. Si $H$ est le projeté de $M$ sur $(AB)$, $IH\times AB=4$ avec $H$ du côté de $B$ : $IH=1$. $E_2$ est la perpendiculaire à $(AB)$ passant par le point $H$ de $[IB]$ tel que $IH=1$.

# 8 Droites et cercles dans un repère orthonormé




### ◆ Théorème — vecteur normal et distance

- Un vecteur non nul $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est **normal** à la droite $D$ s'il est orthogonal à un vecteur directeur de $D$.
  La droite passant par $A$ et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des $M$ tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$ : elle a une équation $ax+by+c=0$.
- Réciproquement, $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est normal à la droite d'équation $ax+by+c=0$.
- Distance d'un point $M_0(x_0\,;y_0)$ à $D: ax+by+c=0$ :

$$d(M_0,D)=\frac{|a\,x_0+b\,y_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

### ◆ Démonstration

Soit $H$ le projeté orthogonal de $M_0$ sur $D$. $\overrightarrow{HM}_0$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, donc $|\overrightarrow{HM}_0\cdot\vec{n}|=H\,M_0\times\sqrt{a^2+b^2}$. Or $\overrightarrow{HM}_0\cdot\vec{n}=a(x_0-x_H)+b(y_0-y_H)=a\,x_0+b\,y_0+c$ puisque $a\,x_H+b\,y_H=-c$.

### ◆ Théorème — équation d'un cercle

- Le cercle de centre $\Omega(x_0\,;y_0)$ et de rayon $R$ a pour équation $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.
- L'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que $x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\gamma=0$ est le cercle de centre $\Omega(\alpha\,;\beta)$ et de rayon $\sqrt{\alpha^2+\beta^2-\gamma}$ si $\alpha^2+\beta^2-\gamma>0$, le point $\Omega$ si cette quantité est nulle, l'ensemble vide si elle est négative.
- Position d'une droite $D$ et d'un cercle $(\Omega,R)$ : sécants si $d(\Omega,D)<R$, tangents si $d(\Omega,D)=R$, extérieurs si $d(\Omega,D)>R$. La tangente en $A$ au cercle est la droite passant par $A$ de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega A}$.

◆ **Exemple corrigé — cercle et droite**

$(\mathscr{C}) : x^2+y^2-4x+2y-4=0$ et $D : 3x+4y+8=0$.

**1)** Déterminer le centre et le rayon de $(\mathscr{C})$.

**2)** Étudier la position relative de $D$ et $(\mathscr{C})$.

**3)** Écrire une équation de la tangente à $(\mathscr{C})$ au point $A(5;-1)$.

**Solution.**

**1)** $(x-2)^2+(y+1)^2=9$ : centre $\Omega(2;-1)$, rayon $3$.

**2)** $d(\Omega, D)=\dfrac{|6-4+8|}{5}=2<3$ : $D$ coupe $(\mathscr{C})$ en deux points.

**3)** $A\in(\mathscr{C})$ et $\overrightarrow{\Omega A}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ : la tangente est l'ensemble des $M$ tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{\Omega A}=0$, soit $3(x-5)=0$ :

$x=5$.

## ★ Fiche mémo

| Notion | À retenir |
|---|---|
| Définition | $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta=\pm ON\times OH$ |
| Orthogonalité | $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow xx'+yy'=0$ |
| Normes | $\vec{u}\cdot\vec{v}=\dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$ |
| Al-Kashi | $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$ |
| Aire, sinus | $S=\dfrac{1}{2}bc\sin\alpha\ ;\ \dfrac{\sin\alpha}{a}=\dfrac{2S}{abc}$ |
| Médiane | $CA^2+CB^2=2CI^2+\dfrac{AB^2}{2}$ |
| Distance | $d(M_0, D)=\dfrac{\|ax_0+by_0+c\|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ |
| Cercle | $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ |