EXERCICES • 2ÈME ANNÉE SCIENCES

Chapitre 9 — Généralités sur les fonctions

1 Variations et bornes

Exercice 1

Soit f définie sur $[-3;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+5}$.

1) Démontrer que $f(x)=2-\dfrac{7}{x+5}$.

2) Démontrer que f est croissante sur $[-3;+\infty[$.

3) Démontrer que f admet un minimum et un majorant ; en déduire un encadrement de $f(x)$.

Exercice 2

Soit f définie sur $I=[-2;2]$ par $f(x)=x^4-2x^2-1$.

1) Étudier la parité de f.

2) Montrer que $f(b)-f(a)=(b^2-a^2)(a^2+b^2-2)$; en déduire les variations de f sur $[0;1]$ puis sur $[1;2]$.

3) Dresser le tableau de variation de f sur I et déterminer son minimum.

Exercice 3

Soit $f(x)=x(1-x)$ sur IR.

1) Montrer que pour tout réel x : $f(x)\leq\dfrac{1}{4}$; en déduire que f admet un maximum.

2) Montrer que $f(x)=\dfrac{1}{4}-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2$ et en déduire que f est croissante sur $]-\infty;\dfrac{1}{2}]$ et décroissante sur $[\dfrac{1}{2};+\infty[$.

2 Parité et composition

Exercice 4

On considère $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$ et $g(x)=x-\dfrac{1}{x}$.

1) Déterminer le domaine de g et étudier sa parité. Montrer que g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

2) Sur $]0;+\infty[$, résoudre $g(x)=0$ et étudier le signe de $g(x)$.

3) Montrer que $f=g^2+2$. En déduire les variations de f sur $]0;+\infty[$, puis sur D_f.

3 Modélisation

Exercice 5

Un triangle ABC a pour hauteur $[AH]$ avec $AB=5$, $BC=8$ et $AH=4$. Par un point K de $[AH]$, on mène la parallèle à (BC), qui coupe $[AB]$ et $[AC]$ en M et N. P et Q sont les projetés orthogonaux de M et N sur (BC). On pose $AK=x$.

1) Calculer en fonction de x le périmètre $p(x)$ du rectangle $MNQP$. Étudier les variations de p.

2) Calculer l'aire $a(x)$ de $MNQP$. Pour quelle valeur de x l'aire est-elle maximale ? Calculer ce maximum.

Exercice 6

Un triangle isocèle ABC a pour base $[BC]$ avec $BC=6$ et pour hauteur $[AH]$ avec $AH=5$. Soit M un point de $[AH]$, $AM=x$. La parallèle à (BC) passant par M coupe $[AB]$ en I et $[AC]$ en J.

1) Calculer IJ en fonction de x.

2) On note $f(x)$ l'aire du triangle AIJ. Préciser l'ensemble de définition de f, exprimer $f(x)$ et étudier ses variations.

Exercice 7

ABC est isocèle avec $AB=AC=5$ et $BC=6$. Par un point D de $[AB]$, on trace la parallèle à (BC) qui coupe (AC) en E. On pose $AD=x$.

1) Calculer BD, EC et DE en fonction de x.

2) Exprimer le périmètre y du trapèze $BDEC$ en fonction de x et représenter la fonction $x\mapsto y$ sur $[0;5]$.

3) Calculer AH (H pied de la hauteur issue de A), puis l'aire z du trapèze en fonction de x. Étudier la fonction $x\mapsto z$ sur $[0;5]$.

Exercice 8

$ABCD$ est un trapèze isocèle de bases $[AB]$ et $[CD]$ avec $AB=12$, $BC=5$ et $CD=6$. Soit M un point de $[AD]$; la parallèle à (AB) passant par M coupe (BC) en N. On pose $AM=x$.

1) Calculer la hauteur du trapèze. On note H le projeté orthogonal de C sur $[AB]$ et E le point d'intersection de (CH) et (MN). Montrer que $EN=\frac{3}{5}(5-x)$ et $EH=\frac{4}{5}x$. En déduire que $MN=\frac{6}{5}(10-x)$.

2) Exprimer l'aire y du trapèze $MNBA$ en fonction de x.

3) Étudier les variations de la fonction f définie sur $[0;5]$ par $f(x)=y$. Pour quelle position de M l'aire de $MNBA$ vaut-elle la moitié de celle de $ABCD$?

Exercice 9

On pose $\varepsilon=10^{-7}$. Comparer $A=\dfrac{1+4\varepsilon}{(1+6\varepsilon)^2}$ et $B=\dfrac{(1-5\varepsilon)^2}{1-2\varepsilon}$, c'est-à-dire $A=\dfrac{1{,}0000004}{1{,}0000006^2}$ et $B=\dfrac{0{,}9999995^2}{0{,}9999998}$.

Auto-évaluation : vrai ou faux ?

Affirmation	Vrai	Faux
1. La fonction $x \mapsto x^3$ est impaire.	☐	☐
2. Une fonction définie sur $[0;5]$ peut être paire.	☐	☐
3. Si $f(x)<2$ pour tout x, alors 2 est le maximum de f.	☐	☐
4. $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$.	☐	☐