COURS • 2ÈME ANNÉE SCIENCES

Chapitre 8 — Géométrie analytique

◆ **Sommaire**

- 1. Rappels : colinéarité, orthogonalité, distance
- 2. Équation cartésienne d'une droite
- 3. Équation réduite — coefficient directeur
- 4. Positions relatives de deux droites
- 5. Distance d'un point à une droite
- 6. Régionnement du plan — systèmes d'inéquations
- 7. Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir — Objectifs du programme officiel**

- Déterminer une équation cartésienne ou réduite d'une droite ; lire un vecteur directeur, un vecteur normal.
- Étudier la position relative de deux droites (parallèles, sécantes, perpendiculaires).
- Représenter graphiquement l'ensemble des solutions d'une inéquation ou d'un système d'inéquations du premier degré à deux inconnues.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1 Rappels : colinéarité, orthogonalité, distance

◆ **Propriété — $\vec{u}(a\,;b)$ et $\vec{v}(a'\,;b')$**

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow \det(\vec{u},\vec{v}) = ab' - a'b = 0$.
- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$.
- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

2 Équation cartésienne d'une droite

◆ **Théorème**

- Toute droite admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$.
- Réciproquement, pour $(a\,;b) \neq (0\,;0)$, l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que $ax + by + c = 0$ est une droite.
- Le vecteur $\vec{u}(-b\,;a)$ est un **vecteur directeur** et $\vec{n}(a\,;b)$ un **vecteur normal** de cette droite.

Démonstration

$M(x\,;y)\in D(A,\vec{u})\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}(\alpha\,;\beta)$ colinéaires $\Leftrightarrow \beta(x-x_A)-\alpha(y-y_A)=0$, de la forme $ax+by+c=0$ avec $(a\,;b)=(\beta\,;-\alpha)\neq(0\,;0)$.

Méthode — équations usuelles

- Droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$: écrire $\det(\overrightarrow{AM},\vec{u})=0$.
- Droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$: écrire $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$, c'est-à-dire $a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$.

Exemple corrigé

Déterminer une équation de la droite (AB) avec $A(1\,;2)$ et $B(3\,;-2)$, puis de la perpendiculaire à (AB) passant par A.

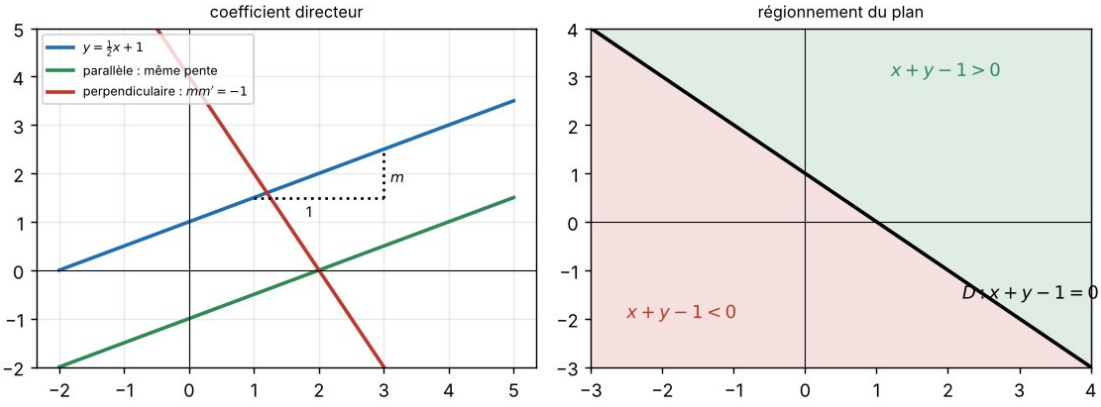
Solution. $\overrightarrow{AB}(2\,;-4)$. $\det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB})=-4(x-1)-2(y-2)=0$, soit $2x+y-4=0$. La perpendiculaire a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}$: $2(x-1)-4(y-2)=0$, soit $x-2y+3=0$.

3 Équation réduite — coefficient directeur

Propriété

- Une droite non parallèle à l'axe des ordonnées a une unique équation **réduite** $y=mx+p$: m est le **coefficient directeur**, p l'**ordonnée à l'origine**, et $\vec{u}(1\,;m)$ est un vecteur directeur.
- Si A et B sont sur la droite ($x_A\neq x_B$) : $m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$.
- Une droite parallèle à l'axe des ordonnées a une équation $x=k$.

4 Positions relatives de deux droites



	$D : ax+by+c=0$ et $D' : a'x+b'y+c'=0$	$D : y=mx+p$ et $D' : y=m'x+p'$
parallèles	$ab'-a'b=0$	$m=m'$
sécantes	$ab'-a'b\neq 0$	$m\neq m'$
perpendiculaires	$aa'+bb'=0$	$mm'=-1$

◆ **Démonstration — $mm'=-1$**

Les vecteurs directeurs $(1\,;m)$ et $(1\,;m')$ sont orthogonaux si et seulement si $1\times 1+m\times m'=0$.

◆ **Exemple corrigé**

$D : y=2x+1$ et $D' : x+2y-3=0$ (soit $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$) : $2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$, les droites sont perpendiculaires.

5 Distance d'un point à une droite

◆ **Théorème**

La distance du point $A(x_0\,;y_0)$ à la droite $D : ax+by+c=0$ est $d(A,D)=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

◆ **Exemple corrigé**

Distance de O à la droite $3x+4y-10=0$: $\dfrac{|-10|}{\sqrt{9+16}}=2$. Le cercle de centre O et de rayon 2 est tangent à cette droite.

6 Régionnement du plan — systèmes d'inéquations

◆ **Théorème**

La droite $D : ax+by+c=0$ partage le plan en deux demi-plans ouverts : l'un est l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que $ax+by+c>0$, l'autre celui des points tels que $ax+by+c<0$.

◆ **Méthode**

- Tracer la droite frontière.
- Tester un point non situé sur la droite (souvent O) pour savoir quel demi-plan convient.
- Pour un système, on hachure les régions qui ne conviennent pas : la région restante est l'ensemble des solutions.

◆ **Exemple corrigé**

Pour $x+y-1>0$: en O, $0+0-1<0$, donc O n'est pas dans la région cherchée ; c'est le demi-plan situé « au-dessus » de la droite (figure ci-dessus).

★ Fiche mémo

Notion	À retenir
Cartésienne	$ax+by+c=0$; directeur $(-b\,;a)$; normal $(a\,;b)$
Réduite	$y=mx+p$; $m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$
Parallèles	$ab'-a'b=0 \Leftrightarrow m=m'$
Perpendiculaires	$aa'+bb'=0 \Leftrightarrow mm'=-1$
Distance	$\dfrac{\lvert a\,x_0+b\,y_0+c\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$
Régionnement	signe de $ax+by+c$; tester un point