EXERCICES • 2ÈME ANNÉE SCIENCES

Chapitre 7 — Homothéties

1 Déterminer une homothétie

Exercice 1

A, B, C sont alignés dans cet ordre avec $BC = 4\,AB$. Montrer qu'il existe une unique homothétie qui transforme A en B et B en C ; la déterminer.

Exercice 2

O et O' sont deux points distincts, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux cercles de centres O et O' et de rayons R et $R' = 3R$. Déterminer les homothéties qui transforment $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$.

Exercice 3

Soit h une homothétie de rapport k et (P) un rectangle de côtés a et b, d'image (P'). Comment choisir k pour que le périmètre de (P') soit le double de celui de (P) ? pour que son aire soit le double ?

Exercice 4

Soit H une homothétie de centre O et de rapport k ($k \neq 0$, $k \neq 1$) et T la translation de vecteur $\vec{v}$. Montrer que $T \circ H$ est une homothétie dont on déterminera les éléments.

2 Constructions

Exercice 5

Soient deux droites sécantes D et Δ et un point A n'appartenant à aucune d'elles. Construire $M \in D$ et $N \in \Delta$ tels que A soit le barycentre de $(M, 2)$ et $(N, 3)$.

Exercice 6

On donne deux droites sécantes D et Δ et deux points A et G n'appartenant ni à D ni à Δ. Construire un triangle ABC de centre de gravité G tel que $B \in \Delta$ et le milieu B' de $[AC]$ soit sur D.

3 Lieux de points

Exercice 7

Soit ζ un cercle de centre O et de rayon R, $[AB]$ un diamètre et M un point variable de ζ. On note N le symétrique de A par rapport à M.

1) Quel est l'ensemble des points N ?

2) Pour $M \neq A$ et $M \neq B$, les droites (BM) et (ON) se coupent en I. Que représente I pour le triangle ABN ? Déterminer l'ensemble des points I.

Exercice 8

Soit ABC un triangle, A', B', C' les milieux de $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ et M un point du plan. On note D, E, F les symétriques de M par rapport à A', B', C'.

1) Montrer que $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OM}$ pour tout point O.

2) En déduire que les segments $[AD]$, $[BE]$, $[CF]$ ont le même milieu P ; conclure sur les droites (AD), (BE), (CF).

Exercice 9

Soit ABC un triangle, A', B', C' les milieux de $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$, G son centre de gravité et M un point distinct de A', B', C'. On note Δ_1 la parallèle à (MA') menée par A, Δ_2 la parallèle à (MB') menée par B et Δ_3 la parallèle à (MC') menée par C.

1) Déterminer l'homothétie h de centre G qui transforme A' en A, B' en B et C' en C.

2) Soit $N=h(M)$. Montrer que Δ_1, Δ_2, Δ_3 passent par N.

3) En déduire que G, M, N sont alignés.

Exercice 10

Soit ABC un triangle inscrit dans le cercle ζ de centre O et de rayon R, G son centre de gravité, H son orthocentre ($\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$). On note A', B', C' les milieux des côtés et ζ' le cercle passant par A', B', C', de centre O'.

1) Montrer que ζ' est l'image de ζ par $h\left(G,-\frac{1}{2}\right)$. Quel est son rayon ?

2) Montrer que $2\overrightarrow{GO}=\overrightarrow{HG}$ et que $2\overrightarrow{GO'}=\overrightarrow{OG}$.

3) Exprimer $\overrightarrow{HO}$ et $\overrightarrow{HO'}$ à l'aide de $\overrightarrow{GO}$. En déduire que $\zeta'=h\left(H,\frac{1}{2}\right)(\zeta)$.

4) Que peut-on dire des milieux A_1, B_1, C_1 des segments $[HA]$, $[HB]$, $[HC]$?

Exercice 11

Deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, de centres O et O' et de rayons R et R', sont tangents extérieurement en T. Une droite variable passant par T recoupe $\mathscr{C}$ en M et $\mathscr{C}'$ en M'. Montrer que les tangentes à $\mathscr{C}$ en M et à $\mathscr{C}'$ en M' sont parallèles.

Auto-évaluation : vrai ou faux ?

Affirmation	Vrai	Faux
1. $h(\Omega, -1)$ est la symétrie de centre Ω.	☐	☐
2. Une homothétie de rapport 3 multiplie les aires par 3.	☐	☐
3. L'image d'une droite par une homothétie est une droite parallèle (ou confondue).	☐	☐
4. Une homothétie de rapport $k \neq 1$ a un seul point invariant.	☐	☐