COURS • 2ÈME ANNÉE SCIENCES

Chapitre 7 — Homothéties

◆ **Sommaire**

- 1. Définition d'une homothétie
- 2. Propriété caractéristique
- 3. Images des figures — conservation
- 4. Homothétie réciproque
- 5. Déterminer une homothétie
- 6. Homothéties et triangle — applications
- 7. Fiche mémo

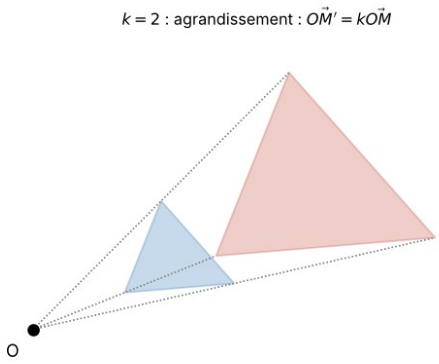
◆ **L'essentiel à retenir — Objectifs du programme officiel**

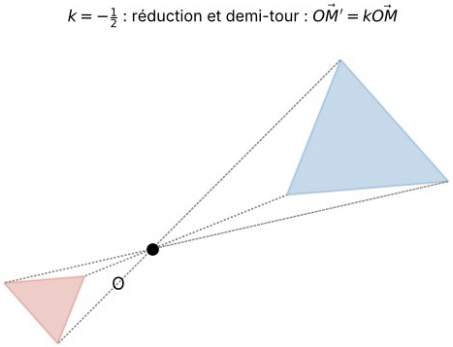
- Construire l'image d'un point, d'une figure par une homothétie.
- Reconnaître une homothétie ; déterminer son centre et son rapport.
- Utiliser les homothéties pour démontrer (alignement, parallélisme, concours) et pour résoudre des problèmes de lieux.

1 Définition d'une homothétie

◆ **Définition**

Soit I un point et k un réel non nul. L'**homothétie de centre I et de rapport k**, notée $h(I, k)$, est l'application du plan qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$.





◆ **Propriété**

- I, M et M' sont alignés.
- Si $k=1$: identité ; si $k=-1$: symétrie centrale de centre I.
- Si $k\neq 1$: le seul point invariant est le centre I.
- Si $k>0$, M et M' sont du même côté de I ; si $k<0$, ils sont de part et d'autre.

2 Propriété caractéristique

◆ **Théorème**

Si $A'=h(I,k)(A)$ et $B'=h(I,k)(B)$, alors $\overrightarrow{A'B'}=k\,\overrightarrow{AB}$; en particulier $A'B'=|k|AB$.

◆ **Démonstration**

$\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{A'I}+\overrightarrow{IB'}=-k\,\overrightarrow{IA}+k\,\overrightarrow{IB}=k(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB})=k\,\overrightarrow{AB}$.

3 Images des figures — conservation

Figure	Image par $h(I,k)$
droite (AB)	droite $(A'B')$ parallèle à (AB) ; une droite passant par I est invariante
segment $[AB]$	segment $[A'B']$ de longueur $\|k\|AB$
cercle de centre E, de rayon r	cercle de centre $E'=h(I,k)(E)$, de rayon $\|k\|r$
polygone de périmètre p et d'aire a	polygone de périmètre $\|k\|p$ et d'aire k^2a

◆ **Propriété — conservation**

Une homothétie conserve l'alignement, le parallélisme, l'orthogonalité, les milieux, les angles géométriques et le contact. Elle multiplie les distances par $|k|$ et les aires par k^2.

4 Homothétie réciproque

◆ **Propriété**

$h(I,k)$ est une bijection du plan ; sa réciproque est l'homothétie $h(I,\frac{1}{k})$: $M'=h(I,k)(M)\Leftrightarrow M=h(I,\frac{1}{k})(M')$.

5 Déterminer une homothétie

◆ Théorème

Soit A, B, A', B' quatre points tels que $\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB}$ avec $k \neq 0$ et $k \neq 1$, et $A \neq B$. Il existe une unique homothétie de rapport k qui transforme A en A' et B en B' ; son centre I est le point d'intersection des droites (AA') et (BB') (lorsqu'elles sont distinctes).

◆ Méthode — trouver le centre

Le centre vérifie $\overrightarrow{IA'} = k\,\overrightarrow{IA}$, soit $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{1-k}\overrightarrow{AA'}$: I est le barycentre de $(A', 1)$ et $(A, -k)$.

◆ Exemple corrigé

$ABCD$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$ avec $CD = \dfrac{1}{2}AB$. Les droites (AD) et (BC) se coupent en I. Montrer que D et C sont les images de A et B par une homothétie de centre I.

Solution. $\overrightarrow{DC} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (même sens). L'homothétie de rapport $\dfrac{1}{2}$ qui envoie A sur D et B sur C a pour centre l'intersection de (AD) et (BC), c'est-à-dire I : $D = h\left(I, \frac{1}{2}\right)(A)$ et $C = h\left(I, \frac{1}{2}\right)(B)$.

6 Homothéties et triangle — applications

◆ Propriété — droite des milieux

Si I, J sont les milieux de $[AB]$ et $[AC]$, alors J et I sont les images de C et B par $h\left(A, \frac{1}{2}\right)$:

$(IJ) \parallel (BC)$ et $IJ = \dfrac{1}{2}BC$.

◆ Propriété — triangle médian

L'homothétie de centre G (centre de gravité) et de rapport $-\dfrac{1}{2}$ transforme A, B, C en les milieux A', B', C' des côtés opposés.

◆ Exemple corrigé — lieu géométrique

A est un point fixe et M décrit un cercle (C) de centre O et de rayon r. Déterminer le lieu du milieu N de $[AM]$.

Solution. $\overrightarrow{AN} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AM}$: $N = h\left(A, \frac{1}{2}\right)(M)$. Le lieu de N est le cercle de centre O' milieu de $[AO]$ et de rayon $\dfrac{r}{2}$.

Fiche mémo

Notion	À retenir
Définition	$\overrightarrow{\mathrm{IM}'} = k\,\overrightarrow{\mathrm{IM}}$ $(k \neq 0)$
Caractéristique	$\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB}$; distances × $\lvert k \rvert$, aires × k^2
Images	droite parallèle ; cercle de rayon $\lvert k \rvert r$
Réciproque	$h\left(I, \frac{1}{k}\right)$
Centre	intersection de (AA') et (BB')
Cas particuliers	$k = 1$: identité ; $k = -1$: symétrie centrale