EXERCICES • 2ÈME ANNÉE SCIENCES

Chapitre 5 — Polynômes

1 Factorisation

Exercice 1

Factoriser $P(x)=x^4-1$ et $Q(x)=x^4+1$ en produits de polynômes du second degré. (Pour Q : $x^4+1=(x^2+1)^2-2x^2$.)

Exercice 2

Soit $P(x)=x^4-3x^3+3x^2-3x-2$.

1) Montrer que $a=1+\sqrt{2}$ et $b=1-\sqrt{2}$ sont des racines de P.

2) Calculer $(x-a)(x-b)$ puis factoriser $P(x)$.

Exercice 3

À l'aide du schéma de Horner, calculer $P(2)$ et $P(3)$ pour $P(x)=x^5-4x^4-x^2+4$. Vérifier que 1 est racine et factoriser $P(x)$ par $(x-1)$.

2 Identification

Exercice 4

Soit $F(x)=\dfrac{2}{x^2+3x+2}$.

1) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $x\notin\{-1;-2\}$: $F(x)=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x+2}$.

2) En déduire $S=\dfrac{1}{1^2+3+2}+\dfrac{1}{2^2+6+2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2+3n+2}$.

Exercice 5

Soient $P(x)=x^n+x+1$ $(n\geq 2)$ et $Q(x)=x^2+3x-4$. On suppose qu'il existe des polynômes S et R tels que $P(x)=Q(x)S(x)+R(x)$ avec $d^\circ R\leq 1$.

1) Déterminer le degré de S.

2) Déterminer $R(x)$ en fonction de n. (Utiliser les racines de Q.)

3 Équations

Exercice 6

1) Montrer qu'en posant $X=x+\dfrac{k}{x}$, toute équation $x^4+ax^3+bx^2+kax+k^2=0$ $(k\neq 0)$ se ramène à une équation du second degré.

2) Résoudre :

a) $x^4-x^3+5x^2-x+1=0$

b) $x^4-3x^3+4x^2-6x+4=0$

Exercice 7

1) Déterminer un polynôme P du second degré tel que, pour tout réel x, $P(x+1)-P(x)=x$ et $P(0)=0$.

2) En déduire la valeur de $S=1+2+3+\ldots+n$, $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 8

1) Montrer que $(1-x)(1+x+x^2+\ldots+x^n)=1-x^{n+1}$.

2) En déduire la valeur de $S=1+2+2^2+\ldots+2^{2009}$.

Exercice 9

Soient u_1, u_2, u_3 les racines d'une équation du troisième degré. On sait que $u_1+u_2+u_3=6$, $u_1u_2+u_1u_3+u_2u_3=11$ et $u_1u_2u_3=6$.

1) Calculer $S_1={u_1}^2+{u_2}^2+{u_3}^2$.

2) Vérifier que $(x-u_1)(x-u_2)(x-u_3)=x^3-6x^2+11x-6$. En déduire u_1, u_2, u_3.

3) Calculer $S_2={u_1}^3+{u_2}^3+{u_3}^3$ et $S_3={u_1}^4+{u_2}^4+{u_3}^4$.

Exercice 10

Soit $P(x)=x^4+2x^3-7x^2-8x+12$.

1) Vérifier que 1 et 2 sont des racines de P.

2) Déterminer, par identification ou avec Horner, le polynôme Q tel que $P(x)=(x-1)(x-2)Q(x)$.

3) Factoriser complètement $P(x)$, puis résoudre $P(x)\leq 0$.

Exercice 11

Soient a, b, c trois réels tels que $a+b+c=0$. On pose $U=ab+bc+ca$ et $V=abc$.

1) Montrer que $a^2+b^2+c^2=-2U$.

2) Établir que pour tout x : $(x-a)(x-b)(x-c)=x^3+Ux-V$. En déduire $a^3=-Ua+V$, puis $a^4=-Ua^2+Va$ et $a^5=-Ua^3+Va^2$.

3) Montrer que $a^3+b^3+c^3=3V$, $a^4+b^4+c^4=2U^2$ et $a^5+b^5+c^5=-5UV$.

4) Conclure : $\dfrac{a^5+b^5+c^5}{5}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}\times\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}$.

Auto-évaluation : vrai ou faux ?

Affirmation	Vrai	Faux
1. $(x^2+1)(x^3-x)$ est de degré 5.	☐	☐
2. Si $P(2)=0$, alors $P(x)$ est divisible par $(x+2)$.	☐	☐
3. Un polynôme de degré 3 peut avoir 4 racines distinctes.	☐	☐
4. $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$.	☐	☐