COURS • 2ÈME ANNÉE SCIENCES

Chapitre 5 — Polynômes

◆ **Sommaire**

- 1. Fonctions polynômes : définition, degré
- 2. Égalité de deux polynômes — identification
- 3. Opérations sur les polynômes
- 4. Racines et factorisation
- 5. Division par $x-\alpha$: schéma de Horner
- 6. Applications : équations et inéquations
- 7. Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir — Objectifs du programme officiel**

- Reconnaître une fonction polynôme et déterminer son degré.
- Utiliser la méthode d'identification des coefficients.
- Factoriser un polynôme connaissant une racine (identification, division, schéma de Horner).
- Résoudre des équations et inéquations polynomiales par factorisation.

1 Fonctions polynômes : définition, degré

◆ **Définition**

Une **fonction polynôme** est une fonction définie sur IR par $P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0$, où a_0, ..., a_n sont des réels appelés **coefficients**.

Si $a_n\neq 0$, l'entier n est le **degré** de P, noté $d^\circ P=n$; $a_n x^n$ est le **terme de plus haut degré**. Le polynôme nul n'a pas de degré.

◆ **Exemple corrigé**

- $P(x)=3x^4-x+2$ est de degré 4.
- $Q(x)=(x+1)^2-x^2=2x+1$ est de degré 1.
- $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ et $x\mapsto\sqrt{x}$ ne sont pas des polynômes.

2 Égalité de deux polynômes — identification

◆ Théorème

Deux polynômes sont égaux (pour tout réel x) si et seulement s'ils ont le même degré et les mêmes coefficients pour les termes de même degré.

◆ Méthode — méthode d'identification

Pour déterminer des coefficients inconnus, on développe, puis on identifie les coefficients des termes de même degré.

Exemple : déterminer a, b, c tels que $x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(ax^2+bx+c)$. En développant : $ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$. Donc $a=1$, $b-a=-2$, $c-b=-5$, $-c=6$: $a=1$, $b=-1$, $c=-6$.

3 Opérations sur les polynômes

◆ Propriété — pour P et Q non nuls

- $P+Q$ est un polynôme de degré inférieur ou égal au plus grand des degrés de P et Q.
- $P\times Q$ est un polynôme et $d^\circ(PQ)=d^\circ P+d^\circ Q$.

4 Racines et factorisation

◆ Définition

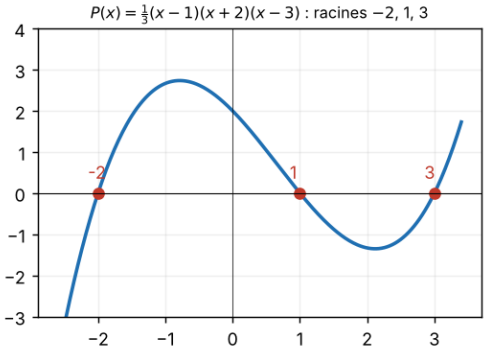
Un réel α est une **racine** (ou un zéro) du polynôme P si $P(\alpha)=0$.

◆ Théorème

- α est une racine de P ($d^\circ P=n\geq 1$) si et seulement s'il existe un polynôme Q de degré $n-1$ tel que $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$.
- Si α_1, ..., α_k sont des racines **distinctes** de P ($k\leq n$), alors $P(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_k)Q(x)$ avec $d^\circ Q=n-k$.
- Un polynôme de degré n admet au plus n racines distinctes.

◆ Démonstration — idée

$P(x)-P(\alpha)=a_n(x^n-\alpha^n)+\dots+a_1(x-\alpha)$ et chaque $x^k-\alpha^k$ se factorise par $x-\alpha$: $x^k-\alpha^k=(x-\alpha)(x^{k-1}+\alpha x^{k-2}+\dots+\alpha^{k-1})$. Si $P(\alpha)=0$, on obtient la factorisation.



5 Division par $x-\alpha$: schéma de Horner

◆ **Méthode**

Pour diviser $P(x)=a_n x^n+\ldots+a_0$ par $x-\alpha$: on écrit les coefficients sur la première ligne ; on abaisse a_n ; puis chaque nombre de la dernière ligne, multiplié par α, est ajouté au coefficient suivant. La dernière case donne le reste $P(\alpha)$, les autres donnent les coefficients du quotient.

◆ **Exemple corrigé — $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$ et $\alpha=1$**

	x^3	x^2	x	constante
coefficients de P	1	-2	-5	6
$\alpha=1$		1	-1	-6
quotient | reste	1	-1	-6	0

Le reste est nul : $P(x)=(x-1)(x^2-x-6)=(x-1)(x+2)(x-3)$.

6 Applications : équations et inéquations

◆ **Méthode**

- Chercher une racine évidente parmi $0, \pm1, \pm2, \ldots$ (pour des coefficients entiers, les racines entières divisent a_0).
- Factoriser par $x-\alpha$ (identification ou Horner), puis factoriser le quotient (discriminant).
- Résoudre l'équation produit ou dresser un tableau de signes.

◆ **Exemple corrigé**

Résoudre $x^3-2x^2-5x+6\geq 0$.

Solution. D'après le paragraphe 5, $P(x)=(x-1)(x+2)(x-3)$. Le tableau de signes donne $P(x)\geq 0 \iff x\in[-2;1]\cup[3;+\infty[$.

Fiche mémo

Notion	À retenir
Degré	plus grand exposant de coefficient non nul ; $d\circ(PQ)=d\circ P+d\circ Q$
Identification	mêmes coefficients pour les termes de même degré
Racine	$P(\alpha)=0 \Leftrightarrow P(x)=(x-\alpha)Q(x)$
Horner	division rapide par $x-\alpha$; reste $P(\alpha)$
Nombre de racines	au plus $d\circ P$