EXERCICES • 2ÈME ANNÉE SCIENCES

# Chapitre 4 — Barycentre

## 1 Barycentre de deux points

### Exercice 1

Déterminer les réels $m$ pour lesquels le barycentre de $(A,m)$ et $(B,m^2+m+1)$ est le symétrique de $A$ par rapport à $B$.

### Exercice 2

$B$ est le milieu de $[AC]$. Démontrer que le barycentre de $(A,1)$ et $(C,3)$ est confondu avec celui de $(B,2)$ et $(C,2)$.

### Exercice 3

$A$, $B$, $C$ sont alignés dans cet ordre, avec $AB=3$ et $BC=5$. Trouver des réels $a$ et $b$ tels que $B$ soit le barycentre de $(A,a)$ et $(C,b)$.

### Exercice 4

Soient $A\neq B$ et $G=\text{bar}\{(A,a);(B,b)\}$ avec $a+b\neq 0$. Démontrer que $G\in[AB]$ si et seulement si $a$ et $b$ sont de même signe.

## 2 Trois points et plus

### Exercice 5

Soit $ABC$ un triangle. On place $M$ milieu de $[AB]$, $N$ tel que $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ et $P=\text{bar}\{(B,-3);(C,1)\}$.

1) Exprimer $C$ comme barycentre de $N$ et $A$.

2) Montrer que $3\overrightarrow{PB}-4\overrightarrow{PN}+3\overrightarrow{PA}=\vec{0}$ et en déduire que $P$, $M$, $N$ sont alignés.

### Exercice 6

Soit $ABC$ un triangle, $E$ le milieu de $[AB]$ et $G=\text{bar}\{(A,-2);(B,-2);(C,15)\}$. Démontrer que $G$, $C$, $E$ sont alignés.

### Exercice 7

$ABCD$ est un quadrilatère et $G$ est défini par $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{GC}+3\overrightarrow{GD}=\vec{0}$. Construire $G$.

### Exercice 8

Dans un repère, $A(2,1)$, $B(-1,5)$, $C(5,7)$ et $G(1;\frac{5}{3})$. Déterminer les coordonnées de l'isobarycentre $I$ de $B$ et $C$, de l'isobarycentre $H$ de $A$, $B$, $C$. Existe-t-il $k$ tel que $G$ soit le barycentre de $(A,1)$ et $(B,k)$ ?

## 3 Ensembles de points

### Exercice 9

$[AB]$ est un segment de longueur 9 cm, $E=\text{bar}\{(A,2);(B,1)\}$ et $F=\text{bar}\{(A,-2);(B,1)\}$.
Déterminer les ensembles :

**a)** des points $M$ tels que $\|\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MA}\|=0$ ;

**b)** des points $M$ tels que $\|\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MA}\|=3\|\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MA}\|$ ;

**c)** des points $M$ tels que $AB\leq\|\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MA}\|\leq 2AB$.

### Exercice 10

$ABC$ est un triangle équilatéral de côté 4 cm. Déterminer l'ensemble des points $M$ tels que $\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MC}\|=\|\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\|$.

### Exercice 11

Soit $ABC$ un triangle rectangle en $A$, $I$ le milieu de $[BC]$ et $J$ le milieu de $[BI]$.

**1)** Montrer que $J$ est le barycentre de $(B,3)$ et $(C,1)$.

**2)** Déterminer et construire $E=\{M\,;\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|\}$.

**3)** Soit $G$ défini par $2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. Montrer que $G$ est le milieu de $[AI]$.

### Exercice 12

Soit $ABCD$ un parallélogramme, $I$ le milieu de $[AD]$, $P$ tel que $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $Q$ le symétrique de $I$ par rapport à $A$. Montrer que $P$, $Q$ et $C$ sont alignés.

### Exercice 13

Soit $ABC$ un triangle et $k$ un réel non nul. On définit $D$ et $E$ par $\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE}=k\overrightarrow{CA}$. On note $B'$, $C'$ les milieux de $[AC]$ et $[AB]$.

**1)** Faire une figure pour $k=\frac{1}{3}$ puis pour $k=-1$.

**2)** Montrer que $D=\text{bar}\{(A,1-k);(B,k)\}$ et $E=\text{bar}\{(C,1-k);(A,k)\}$.

**3)** Montrer que pour tout point $M$ : $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}=2(\overrightarrow{MB'}+k\overrightarrow{B'C'})$.

**4)** Soit $I$ le milieu de $[DE]$. En déduire que $I$, $B'$, $C'$ sont alignés.

### Exercice 14

Soient $A\neq B$ et $f$ l'application qui à $M$ associe $M'$ tel que $\overrightarrow{MM'}=3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}$.

**1)** Montrer que $\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{MG}$ où $G$ est un barycentre à préciser. Quelle est la nature de $f$ ?

**2)** Déterminer les points invariants par $f$, puis l'ensemble des $N$ tels que $\|\overrightarrow{Nf(N)}\|=4$.

**3)** Si $M'$ et $N'$ sont les images de $M$ et $N$, montrer que $\overrightarrow{M'N'}=-\overrightarrow{MN}$.

### Exercice 15

Soit $ABC$ un triangle, $J$ le milieu de $[AC]$. Pour tout point $M$ on pose $\overrightarrow{f(M)}=-2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MJ}$ et $\overrightarrow{h(M)}=-3\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MJ}$.

**1)** Montrer que $\overrightarrow{f(M)}$ ne dépend pas de $M$.

**2)** Montrer qu'il existe un unique point $G$ tel que $\overrightarrow{h(G)}=\vec{0}$ ; le construire. Exprimer $\overrightarrow{h(M)}$ à l'aide de $\overrightarrow{GM}$.

**3)** Déterminer et construire l'ensemble des points $M$ tels que $\|\overrightarrow{f(M)}\|=\|\overrightarrow{h(M)}\|$.

## Exercice 16

$ABCD$ est un quadrilatère, $G$ le centre de gravité de $ABC$, $I$ et $J$ les milieux de $[AB]$ et $[BC]$, $L=\text{bar}\{(A,1);(D,3)\}$ et $K=\text{bar}\{(C,1);(D,3)\}$. On définit $H$ par $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}+3\overrightarrow{HD}=\vec{0}$.
Montrer que $H$ est le barycentre de $G$ et $D$, de $J$ et $L$, de $I$ et $K$ (poids à préciser) et conclure.

## Auto-évaluation : vrai ou faux ?

| Affirmation | Vrai | Faux |
|---|---|---|
| 1. Le barycentre de $(A,2)$ et $(B,-1)$ appartient au segment $[AB]$. | ☐ | ☐ |
| 2. $\text{bar}\{(A,1);(B,1)\}$ est le milieu de $[AB]$. | ☐ | ☐ |
| 3. $(A,3)$ et $(B,-3)$ ont un barycentre. | ☐ | ☐ |
| 4. $\text{bar}\{(A,2);(B,4)\} = \text{bar}\{(A,1);(B,2)\}$. | ☐ | ☐ |