COURS • 2ÈME ANNÉE SCIENCES

Chapitre 4 — Barycentre

Sommaire

- 1. Mesure algébrique sur une droite
- 2. Barycentre de deux points pondérés
- 3. Réduction d'une somme vectorielle
- 4. Barycentre de trois ou quatre points — associativité
- 5. Coordonnées du barycentre
- 6. Ensembles de points
- 7. Fiche mémo

L'essentiel à retenir — Objectifs du programme officiel

- Construire le barycentre de deux, trois ou quatre points pondérés.
- Utiliser le barycentre pour démontrer un alignement, un point de concours.
- Réduire une somme vectorielle ; déterminer des ensembles de points.

1 Mesure algébrique sur une droite

Définition

Soit Δ une droite munie d'un repère (O, I), et A, B deux points de Δ d'abscisses x_A et x_B. La **mesure algébrique** de $\overrightarrow{AB}$ est le réel $\overline{AB} = x_B - x_A$.

Propriété

- $\overline{BA} = -\overline{AB}$; $|\overline{AB}| = AB$; $\overline{AA} = 0$.
- Relation de Chasles : $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ pour tous points A, B, C de Δ.

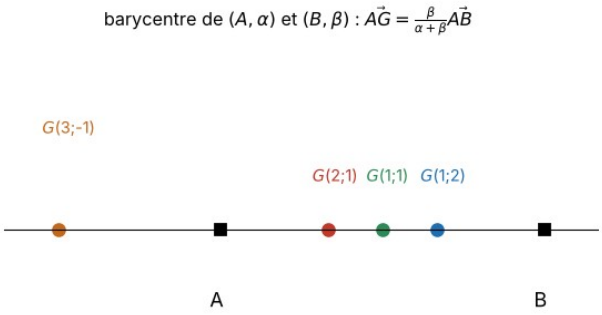
2 Barycentre de deux points pondérés

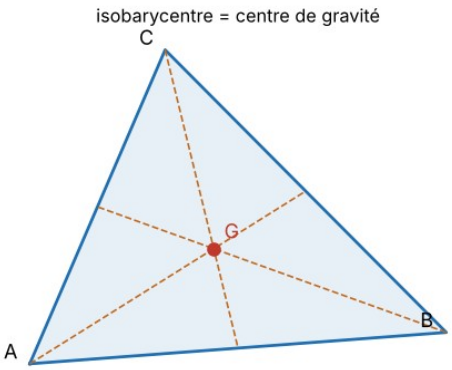
Définition

Soit (A, α) et (B, β) deux points pondérés avec $\alpha + \beta \neq 0$. Il existe un **unique** point G tel que $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$: c'est le **barycentre** de (A, α) et (B, β). On note $G = \text{bar}\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$.

◆ **Démonstration — existence et unicité**

$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0} \Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{GA}+\beta(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB})=\vec{0} \Leftrightarrow (\alpha+\beta)\overrightarrow{AG}=\beta\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$, ce qui définit un unique point G.





◆ **Propriété**

- $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$: G appartient à la droite (AB).
- Le barycentre est inchangé si l'on multiplie les coefficients par un même réel non nul.
- Si α et β sont de même signe, $G\in[AB]$; il est plus proche du point de plus grand coefficient (en valeur absolue).
- Si $\alpha=\beta$, G est le **milieu** de $[AB]$ (isobarycentre).

◆ **Exemple corrigé**

Construire $G=\text{bar}\{(A,2),(B,-3)\}$.

Solution. $\alpha+\beta=-1\neq 0$ et $\overrightarrow{AG}=\dfrac{-3}{-1}\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AB}$: G est sur la demi-droite $[AB)$, au-delà de B, avec $AG=3AB$.

3 Réduction de $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}$

◆ **Théorème**

- Si $\alpha+\beta\neq 0$ et $G=\text{bar}\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$: pour tout point M, $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$.
- Si $\alpha+\beta=0$: $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=\alpha\overrightarrow{BA}$ est un vecteur constant (indépendant de M).

◆ **Démonstration**

Par Chasles : $\alpha(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})+\beta(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}+\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$.

4 Barycentre de trois ou quatre points — associativité

◆ Définition

Si $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$, le barycentre de $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$ est l'unique point G tel que $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. Pour tout point M : $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$. Même définition pour quatre points.

◆ Théorème — associativité (barycentre partiel)

Si $\alpha+\beta\neq 0$ et $H=\text{bar}\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$, alors $\text{bar}\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}=\text{bar}\{(H,\alpha+\beta),(C,\gamma)\}$.

◆ Exemple corrigé — centre de gravité

Montrer que les médianes d'un triangle ABC sont concourantes.

Solution. Soit G l'isobarycentre de A, B, C et A' le milieu de $[BC]$. Par associativité, $G=\text{bar}\{(A,1),(A',2)\}$: $G\in(AA')$ et $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$. De même G est sur les deux autres médianes : elles sont concourantes en G.

5 Coordonnées du barycentre

◆ Propriété

Dans un repère, si $G=\text{bar}\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$: $x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}$ et $y_G=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$.

◆ Exemple corrigé

$A(1;2)$, $B(4;-1)$: $G=\text{bar}\{(A,2),(B,1)\}$ a pour coordonnées $\left(\frac{2+4}{3};\frac{4-1}{3}\right)=(2;1)$.

6 Ensembles de points

◆ Méthode

- On réduit chaque somme vectorielle à l'aide d'un barycentre : $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$.
- $MG=k$ $(k>0)$: cercle de centre G et de rayon k.
- $MG=MG'$: médiatrice de $[\gg']$.

◆ **Exemple corrigé**

$AB=6$. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\|=6$.

Solution. Soit $G=\text{bar}\{(A,1),(B,2)\}$: $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MG}$. La condition s'écrit $3MG=6$, soit $MG=2$: c'est le cercle de centre G et de rayon 2.

★ Fiche mémo

Notion	À retenir
Barycentre de 2 points	$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$; $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$
Réduction	$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$
Coefficients	proportionnels ⇒ même barycentre ; égaux ⇒ milieu
Associativité	remplacer deux points par leur barycentre affecté de la somme
Coordonnées	$x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta}$
Centre de gravité	isobarycentre ; $\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$