COURS • 2ÈME ANNÉE SCIENCES

Chapitre 3 — Équations et inéquations — second degré

◆ **Sommaire**

- 1. Équations et inéquations du premier degré
- 2. Équations produit, équations quotient
- 3. Équations et inéquations avec valeur absolue
- 4. Systèmes de deux équations à deux inconnues
- 5. Trinôme du second degré : forme canonique, discriminant
- 6. Équation du second degré — somme et produit des racines
- 7. Signe du trinôme — inéquations du second degré
- 8. Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir — Objectifs du programme officiel**

- Résoudre des équations et inéquations du premier degré, éventuellement avec paramètre ou valeur absolue.
- Résoudre un système de deux équations linéaires à deux inconnues (substitution, combinaison, déterminant).
- Résoudre une équation du second degré ; factoriser un trinôme ; étudier son signe ; résoudre une inéquation du second degré.

1 Équations et inéquations du premier degré

◆ **Propriété — $ax+b=0$**

- Si $a\neq 0$: une unique solution $x=-\dfrac{b}{a}$.
- Si $a=0$ et $b\neq 0$: pas de solution ; si $a=b=0$: tout réel est solution.

◆ **Propriété — signe de $ax+b$ $(a\neq 0)$**

$ax+b$ est du signe de $-a$ avant la racine $-\dfrac{b}{a}$ et du signe de a après.

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		signe de $-a$	0	signe de a	

◆ **Exemple corrigé — avec paramètre**

Résoudre, suivant les valeurs du réel m, l'équation $(m-1)x = m^2 - 1$.

Solution. Si $m \neq 1$: $x = \dfrac{(m-1)(m+1)}{m-1} = m+1$. Si $m = 1$: l'équation s'écrit $0\,x = 0$, tout réel est solution.

2 Équations produit, équations quotient

◆ **Propriété**

- Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul : $A \times B = 0 \iff A = 0$ ou $B = 0$.
- $\dfrac{A}{B} = 0 \iff A = 0$ et $B \neq 0$.
- Le signe d'un produit ou d'un quotient s'obtient par un **tableau de signes**.

◆ **Exemple corrigé**

Résoudre $\dfrac{2x-4}{x+1} \leq 0$.

Solution. Valeur interdite -1. $2x-4$ s'annule en 2. Le quotient est négatif ou nul pour $x \in]-1\,;2]$.

◆ **Attention**

Ne jamais multiplier les deux membres d'une inéquation par une expression dont on ne connaît pas le signe : on se ramène à $\dfrac{A}{B} \leq 0$ et on étudie le signe.

3 Équations et inéquations avec valeur absolue

◆ **Propriété**

- $|A| = |B| \iff A = B$ ou $A = -B$.
- $|A| = k$: pas de solution si $k < 0$; $A = k$ ou $A = -k$ si $k \geq 0$.
- $|A| \leq k \iff -k \leq A \leq k$ $(k \geq 0)$; $|A| \geq k \iff A \leq -k$ ou $A \geq k$.

◆ **Exemple corrigé**

1) Résoudre $|x-2| = |2x+1|$.

2) Résoudre $|3x-1| \geq 2$.

Solution.

1) $x-2 = 2x+1$ donne $x = -3$; $x-2 = -2x-1$ donne $x = \dfrac{1}{3}$. $S = \{-3\,;\dfrac{1}{3}\}$.

2) $3x-1 \leq -2$ ou $3x-1 \geq 2$: $x \leq -\dfrac{1}{3}$ ou $x \geq 1$. $S =]-\infty\,;-\dfrac{1}{3}] \cup [1\,;+\infty[$.

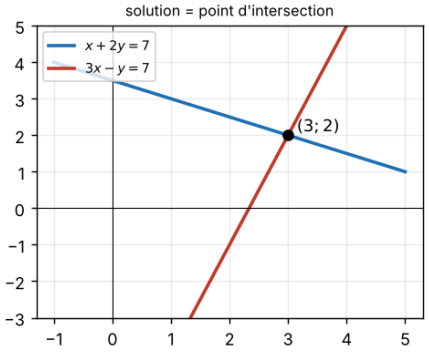
4 Systèmes de deux équations à deux inconnues

◆ Définition

On considère le système $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$, et son **déterminant** $D=ab'-a'b$.

◆ Théorème — méthode de Cramer

- Si $D\neq 0$, le système admet une **unique** solution : $x=\dfrac{D_x}{D}$ et $y=\dfrac{D_y}{D}$, avec $D_x=cb'-c'b$ et $D_y=ac'-a'c$.
- Si $D=0$, le système n'a aucune solution ou en a une infinité.



Interprétation graphique : chaque équation est celle d'une droite ; $D\neq 0$ signifie que les droites sont sécantes, et la solution est leur point d'intersection.

◆ Exemple corrigé

Résoudre $\begin{cases} x+2y=7 \\ 3x-y=7 \end{cases}$.

Solution. $D=1\times(-1)-3\times 2=-7$, $D_x=7\times(-1)-7\times 2=-21$, $D_y=1\times 7-3\times 7=-14$: $x=3$, $y=2$. $S=\{(3;2)\}$.

◆ Méthode — autres méthodes

- **Substitution** : on exprime une inconnue en fonction de l'autre dans une équation et on remplace dans l'autre.
- **Combinaison** : on multiplie les équations par des réels bien choisis et on les ajoute pour éliminer une inconnue.

5 Trinôme du second degré : forme canonique, discriminant

◆ Définition

Un **trinôme du second degré** est une expression $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$. Son **discriminant** est $\Delta=b^2-4ac$.

◆ Théorème — forme canonique

Pour tout réel x : $ax^2+bx+c=a[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a^2}]$.

◆ Démonstration

$ax^2+bx+c=a[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}]=a[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}]=a[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}]$.

6 Équation du second degré — somme et produit des racines

Discriminant	Solutions de $ax^2+bx+c=0$	Factorisation
$\Delta<0$	aucune solution réelle	pas de factorisation dans IR
$\Delta=0$	une racine double $x_0=-\frac{b}{2a}$	$a(x-x_0)^2$
$\Delta>0$	$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$a(x-x_1)(x-x_2)$

◆ Démonstration

D'après la forme canonique, $f(x)=0 \Leftrightarrow (x+\frac{b}{2a})^2=\frac{\Delta}{4a^2}$. Un carré étant positif, il n'y a pas de solution si $\Delta<0$; si $\Delta\geq 0$: $x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$.

◆ Propriété — discriminant réduit

Si $b=2b'$, on pose $\Delta'=b'^2-ac$ ($\Delta=4\Delta'$). Si $\Delta'>0$: $x_{1,2}=\frac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a}$; si $\Delta'=0$: $x_0=-\frac{b'}{a}$.

◆ Théorème — somme et produit

- Si $\Delta \geq 0$, les racines vérifient $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $P = x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$.
- Réciproquement, deux réels de somme S et de produit P sont les solutions de $X^2 - SX + P = 0$.
- Racine évidente : si $a+b+c=0$, les racines sont 1 et $\dfrac{c}{a}$; si $a-b+c=0$, ce sont -1 et $-\dfrac{c}{a}$.

◆ Exemple corrigé

1) Résoudre $2x^2 - 5x + 3 = 0$.

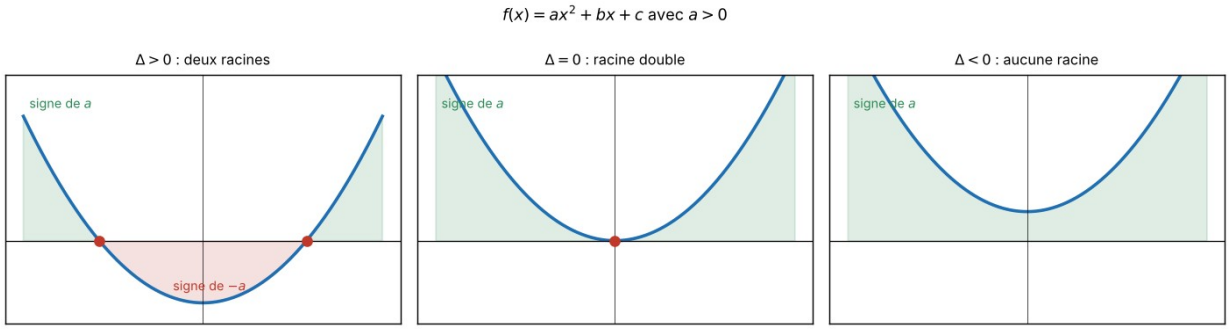
2) Trouver deux réels de somme 7 et de produit 10.

Solution.

1) $2 - 5 + 3 = 0$: les racines sont 1 et $\dfrac{3}{2}$.

2) Ce sont les solutions de $X^2 - 7X + 10 = 0$, soit 2 et 5.

7 Signe du trinôme — inéquations du second degré



◆ Théorème

- Si $\Delta < 0$: $f(x)$ est du signe de a pour tout réel x.
- Si $\Delta = 0$: $f(x)$ est du signe de a pour tout $x \neq x_0$, et $f(x_0) = 0$.
- Si $\Delta > 0$: $f(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines et du signe de a à l'extérieur des racines.

◆ Exemple corrigé

Résoudre $-x^2 + x + 6 > 0$.

Solution. $\Delta = 1 + 24 = 25$, racines -2 et 3. Comme $a = -1 < 0$, le trinôme est positif entre les racines : $S =]-2\,;3[$.

Fiche mémo

Notion	À retenir
$ax+b$	racine $-\frac{b}{a}$; signe de a après la racine
Valeur absolue	$\lvert A\rvert \le k \Leftrightarrow -k \le A \le k$
Système	$D = ab' - a'b \neq 0 \Rightarrow$ solution unique $\left(\frac{D_x}{D}; \frac{D_y}{D}\right)$
Discriminant	$\Delta = b^2 - 4ac$; racines $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
Somme, produit	$S = -\frac{b}{a}$, $P = \frac{c}{a}$
Signe	signe de a sauf entre les racines