EXERCICES • 2ÈME ANNÉE SCIENCES

Chapitre 2 — Calcul vectoriel

1 Relation de Chasles et colinéarité

Exercice 1

Soit $ABCD$ un parallélogramme. I est le milieu de $[BC]$ et E est défini par $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$; A' est le milieu de $[AC]$.

1) Construire les points I, A' et E.

2) Montrer que $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$ et que $\overrightarrow{DI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}$.

3) En déduire que les points D, E et I sont alignés.

4) Construire T et H tels que $\overrightarrow{AT}=4\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BH}=3\overrightarrow{BC}$. Montrer que $(TH)\parallel(BA')$.

Exercice 2

Soit DIM un triangle et A le milieu de $[DM]$. On construit T et H tels que $\overrightarrow{DT}=4\overrightarrow{DI}$ et $\overrightarrow{IH}=3\overrightarrow{IM}$. Montrer que $(TH)\parallel(IA)$.

Exercice 3

A, B, C sont trois points quelconques. Démontrer que les vecteurs $\vec{u}=(1-\sqrt{5})\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=(1+\sqrt{5})\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

2 Bases et composantes

Exercice 4

Soit $(\vec{i},\vec{j})$ une base, $\vec{u}=2\vec{i}+\vec{j}$ et $\vec{v}=3\vec{i}+2\vec{j}$.

1) Montrer que $(\vec{u},\vec{v})$ est une base.

2) Soit $\vec{e}=x\vec{i}+y\vec{j}=X\vec{u}+Y\vec{v}$. Exprimer X et Y en fonction de x et y.

Exercice 5

Soit $ABCD$ un parallélogramme et M le point défini par $3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-4\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

1) Montrer que $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC}$.

2) Déterminer les réels x, y tels que $\overrightarrow{DM}=x\overrightarrow{DC}+y\overrightarrow{DB}$, puis x', y' tels que $\overrightarrow{DM}=x'\overrightarrow{DC}+y'\overrightarrow{DA}$.

3 Base orthonormée

Exercice 6

Le plan est muni d'un repère orthonormé. On donne $A(1,2)$, $B(4,6)$ et $C(-3,5)$. Calculer AB, AC et montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle.

Exercice 7

Soit $(\vec{i},\vec{j})$ une base orthonormée et $\vec{U}=\vec{i}+3\vec{j}$. Déterminer les vecteurs $\vec{V}$ tels que $\vec{V}\perp\vec{U}$ et $\|\vec{V}\|=\|\vec{U}\|$.

4 Ensembles de points

Exercice 8

Soit ABC un triangle, I, J et H les milieux respectifs de $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

1) $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\|=\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\|$

2) $\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=4\,AB$

Exercice 9

Soient A et B deux points distincts. Déterminer l'ensemble des points M tels que $2\,AB\leq\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\|\leq 4\,AB$.

Exercice 10

Soit ABC un triangle, A', B', C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ et G le point tel que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

1) Montrer que $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GA'}$. En déduire que $\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{GA'}$.

2) Montrer de même que $\overrightarrow{BG}=2\overrightarrow{GB'}$ et $\overrightarrow{CG}=2\overrightarrow{GC'}$.

3) En déduire que les trois médianes sont concourantes en G.

Exercice 11

Soit ABC un triangle. À chaque réel k on associe les points M et N définis par $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+(1-k)\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+(1-k)\overrightarrow{AB}$.

1) Placer M et N pour $k=2$.

2) Montrer que pour tout réel k, $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

3) Déterminer k pour que :

   a) $M=N$;

   b) $BCMN$ soit un parallélogramme ;

   c) $BCNM$ soit un parallélogramme.

Exercice 12

Soient A, B, C, D quatre points du plan, I et J les milieux respectifs de $[AC]$ et $[BD]$.

1) Démontrer que $2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.

2) Pour un point M, on note N, P, R, M' les symétriques successifs : N de M par rapport à A, P de N par rapport à B, R de P par rapport à C, M' de R par rapport à D. Montrer que $\overrightarrow{MM'}=4\overrightarrow{IJ}$.

3) Comment choisir A, B, C, D pour que $M=M'$ pour tout point M ?

Exercice 13

Soit ABC un triangle de centre de gravité G et A', B', C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. À tout point M on associe S tel que $\overrightarrow{MS}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$.

1) Exprimer $\overrightarrow{MS}$ en fonction de $\overrightarrow{MG}$. Montrer que $\overrightarrow{AS}=2\overrightarrow{MA'}$; que peut-on dire des droites (AS) et (MA') ?

2) Soient A'', B'', C'' les milieux de $[SA]$, $[SB]$, $[SC]$. Montrer que $[A'A'']$, $[B'B'']$, $[C'C'']$ et $[SM]$ ont le même milieu.

Exercice 14

Soit ABC un triangle, O le centre de son cercle circonscrit, G son centre de gravité, H son orthocentre, M le milieu de $[BC]$ et D le point diamétralement opposé à A.

1) Quelle est la nature de $BHCD$? En déduire que $\overrightarrow{HA}=2\overrightarrow{MO}$.

2) Démontrer que $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$, puis que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$.

3) Montrer que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$ et en déduire que O, G, H sont alignés.

Exercice 15

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs et E, F deux points.

1) Montrer que $\|\vec{u}+\vec{v}\|\leq\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$. (Comparer les carrés en coordonnées.)

2) Prouver que $2\|\overrightarrow{OE}\|\leq\|\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}\|+\|\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OF}\|$.

3) Soit ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$. Montrer que $BC\leq AB+AC\leq 2AI+BC$.

Exercice 16

Soit $ABCDEF$ un hexagone quelconque et P, Q, R, S, T, U les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DE]$, $[EF]$, $[FA]$. Montrer que les triangles PRT et QSU ont le même centre de gravité.

Auto-évaluation : vrai ou faux ?

Affirmation	Vrai	Faux
1. Si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ alors $ABCD$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).	☐	☐
2. $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ sont colinéaires.	☐	☐
3. Dans une base orthonormée, $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ sont orthogonaux.	☐	☐
4. $\|\vec{u}+\vec{v}\|=\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$ pour tous vecteurs.	☐	☐