COURS • 2ÈME ANNÉE SCIENCES

Chapitre 2 — Calcul vectoriel

Sommaire

- 1. Vecteurs : égalité, somme, relation de Chasles
- 2. Produit d'un vecteur par un réel
- 3. Vecteurs colinéaires — alignement, parallélisme
- 4. Bases, repères, composantes et coordonnées
- 5. Déterminant de deux vecteurs
- 6. Base orthonormée : norme, distance, orthogonalité
- 7. Fiche mémo

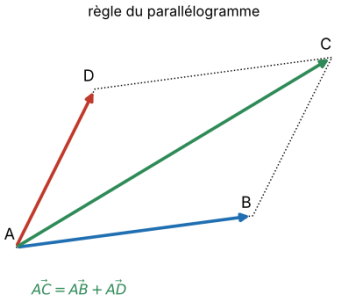
L'essentiel à retenir — Objectifs du programme officiel

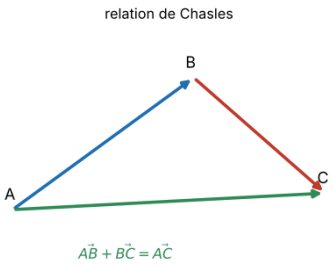
- Utiliser la relation de Chasles et la règle du parallélogramme.
- Reconnaître des vecteurs colinéaires ; démontrer un alignement ou un parallélisme.
- Calculer avec les composantes : déterminant, norme, distance, condition d'orthogonalité.

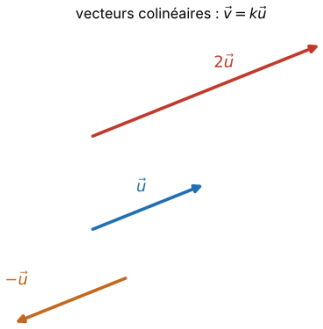
1 Vecteurs : égalité, somme, relation de Chasles

Définition

- Deux vecteurs sont **égaux** s'ils ont même direction, même sens et même norme : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow ABCD$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).
- Le vecteur nul $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$; l'opposé de $\overrightarrow{AB}$ est $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.







Théorème

- **Relation de Chasles** : pour tous points A, B, C : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
- **Règle du parallélogramme** : $ABCD$ est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.
- **Milieu** : I est le milieu de $[AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$.

◆ **Exemple corrigé**

Simplifier $\vec{u}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AD}$.

Solution. $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

2 Produit d'un vecteur par un réel

◆ **Définition**

Pour $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $k\neq 0$, $k\vec{u}$ a la même direction que $\vec{u}$, le même sens si $k>0$, le sens contraire si $k<0$, et pour norme $|k|\times\|\vec{u}\|$. Par convention $0\vec{u}=k\vec{0}=\vec{0}$.

◆ **Propriété**

- $k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}\,;\,(k+k')\vec{u}=k\vec{u}+k'\vec{u}\,;\,k(k'\vec{u})=(kk')\vec{u}$.
- $k\vec{u}=\vec{0}\Leftrightarrow k=0$ ou $\vec{u}=\vec{0}$.

3 Vecteurs colinéaires — alignement, parallélisme

◆ **Définition**

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si l'un est le produit de l'autre par un réel : si $\vec{u}\neq\vec{0}$, il existe $k\in IR$ tel que $\vec{v}=k\vec{u}$. Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

◆ **Propriété**

- A, B, C sont **alignés** $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
- Les droites (AB) et (CD) sont **parallèles** $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

◆ **Exemple corrigé**

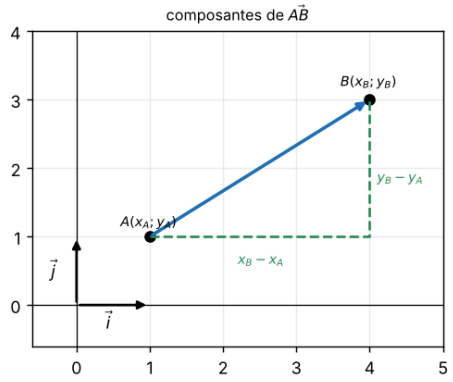
ABC est un triangle ; M et N sont définis par $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Montrer que $(MN)\parallel(BC)$.

Solution. $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$: les vecteurs sont colinéaires, donc $(MN)\parallel(BC)$.

4 Bases, repères, composantes et coordonnées

◆ **Définition**

- Deux vecteurs non colinéaires $(\vec{i},\vec{j})$ forment une **base** ; avec un point O, $(O,\vec{i},\vec{j})$ est un **repère**.
- Tout vecteur s'écrit de façon unique $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$: $(x\,;y)$ sont ses **composantes**. Les **coordonnées** de M sont les composantes de $\overrightarrow{OM}$.



◆ Propriété

- $\vec{AB}(x_B - x_A ; y_B - y_A)$.
- Si $\vec{u}(x ; y)$ et $\vec{v}(x' ; y')$: $\vec{u}+\vec{v}(x+x' ; y+y')$ et $k\vec{u}(kx ; ky)$; $\vec{u}=\vec{v} \Leftrightarrow x=x'$ et $y=y'$.
- Milieu I de $[AB]$: $I\left(\frac{x_A+x_B}{2} ; \frac{y_A+y_B}{2}\right)$.

◆ Exemple corrigé

$A(1;2), B(4;3), C(5;-1)$. Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Solution. $\vec{AD}=\vec{BC}$: $x_D-1=1$ et $y_D-2=-4$, donc $D(2;-2)$.

5 Déterminant de deux vecteurs

◆ Définition

Dans une base, si $\vec{u}(x ; y)$ et $\vec{v}(x' ; y')$, le **déterminant** de $(\vec{u}, \vec{v})$ est $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$.

◆ Théorème

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

◆ Démonstration

Si $\vec{v}=k\vec{u}$: $xy'-x'y=x(ky)-(kx)y=0$. Réciproquement, si $xy'=x'y$ et $\vec{u}\neq\vec{0}$, par exemple $x\neq 0$, on pose $k=\frac{x'}{x}$: alors $x'=kx$ et $y'=\frac{x'y}{x}=ky$.

◆ Exemple corrigé

$A(1;2), B(3;5), C(7;11)$: $\vec{AB}(2;3)$, $\vec{AC}(6;9)$, $\det = 2\times 9 - 6\times 3 = 0$: A, B, C sont alignés.

6 Base orthonormée : norme, distance, orthogonalité

◆ Définition

La base $(\vec{i},\vec{j})$ est **orthonormée** si $\vec{i}\perp\vec{j}$ et $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1$.

◆ Théorème — dans une base orthonormée

- $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$; $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.
- $\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow xx'+yy'=0$.

◆ Démonstration — orthogonalité

$\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2$ (Pythagore) $\Leftrightarrow (x+x')^2+(y+y')^2=x^2+y^2+x'^2+y'^2 \Leftrightarrow 2(xx'+yy')=0$.

◆ Exemple corrigé

$A(-1;1)$, $B(3;3)$, $C(1;7)$. Montrer que le triangle ABC est rectangle et calculer son aire.

Solution. $\overrightarrow{BA}(-4;-2)$, $\overrightarrow{BC}(-2;4)$: $8-8=0$, donc le triangle est rectangle en B. $BA=\sqrt{20}$, $BC=\sqrt{20}$: aire $\frac{1}{2}\times 20=10$.

★ Fiche mémo

Notion	À retenir
Chasles	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$
Parallélogramme	$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$
Milieu	$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$; $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$
Colinéaires	$\vec{v}=k\vec{u} \Leftrightarrow xy'-x'y=0$
Alignement / parallélisme	vecteurs colinéaires
Norme, distance	$\sqrt{x^2+y^2}$ (base orthonormée)
Orthogonalité	$xx'+yy'=0$ (base orthonormée)